

Esercizio 1. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{(x-1)y}{x}; & \dot{y} &= (1+\ln x)y; & \dot{y} + \frac{y}{2x} &= 0; & \dot{y} &= y\sqrt{x}; & \dot{y} &= \frac{(\ln x)y}{x}; \\ \dot{y} &= \frac{xy}{x^2-1}; & \dot{y} &= \frac{y}{\sin x}; & \dot{y} &= (\arcsin x)y; & \dot{y} &= \frac{1-y}{x}; & \dot{y} + 2xy &= xe^{-x^2}; \\ \dot{y} &= \frac{1+x+2y}{x}; & \dot{y} + \frac{y}{x} &= e^x; & \dot{y} &= (\tan x)y + \cos x; & \dot{y} &= \frac{1+y}{\sqrt{x}}; \\ \dot{y} &= (y+1)x \sin x; & (1+x^2)\dot{y} + xy &= \frac{1}{1+x^2}; & \dot{y} &= \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2 e^x. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Calcolare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{y} = \frac{1-y}{x}; \\ y(1) = 0 \end{cases}; & \quad \begin{cases} \dot{y} = \frac{2xy}{1+x^2} + (x+x^3) \sin x; \\ y(0) = 0 \end{cases}; & \quad \begin{cases} \dot{y} = \frac{x+1}{x}y + x(1-x); \\ y(1) = e \end{cases}; \\ \begin{cases} 2\dot{y} + 2(\cos x)y = \sin(2x); \\ y(0) = 0 \end{cases}; & \quad \begin{cases} \dot{y} + \frac{y}{x} = \sqrt[3]{x}; \\ y(1) = \frac{3}{7} \end{cases}; & \quad \begin{cases} \dot{y} = 2xy + e^{x^2} \sin x; \\ y(\pi) = e^{\pi^2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:

$$\begin{aligned} \dot{y} + \frac{x}{y} &= 0; & \dot{y} &= 2x \cos^2 y; & \sqrt{x}\dot{y} + \sqrt{y} \sin(\sqrt{x}) &= 0; & \dot{y} &= e^{(x-y)} \cos x; \\ \dot{y}(1+e^{2x}) &= ye^{2x}; & e^{(x+y)}\dot{y} &= x; & 2x^2 y \dot{y} &= 1+y^2; & x\dot{y} &= \tan y. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Calcolare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{y} + 2x^2\sqrt{y} = 0; \\ y(1) = 4 \end{cases}; & \quad \begin{cases} \dot{y}(x^2-1) = y^2-1; \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}; & \quad \begin{cases} (1+x^3)\dot{y} = x^2y; \\ y(1) = 2 \end{cases}; \\ & & & \begin{cases} e^{(x-y^2)} \sin x = y^2 \dot{y}; \\ y(0) = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -xy + x^3 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Allora si ha:

☐ A $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} = +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

☐ B $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$ esiste finito per ogni $\alpha \geq 2$.

☐ C Esiste un unico $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$ esiste finito.

☐ D Esiste un unico $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} = +\infty$.

Esercizio 6. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x > 0$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = y \cos x + e^{\sin x} \ln x \\ y(\pi) = \pi. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

☐ A φ è periodica.

☐ B φ ha almeno uno zero.

☐ C φ non ha nè massimo assoluto nè minimo assoluto.

☐ D φ ha un asintoto obliquo.

Esercizio 7. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = 2xy - e^{x^2} \sin x \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

☐ A φ ha in $x = 0$ un punto di minimo locale.

☐ B La retta di equazione $y = x - 2$ è tangente al grafico di φ nel punto $(0, -2)$.

☐ C $e^{-x^2} \varphi(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

☐ D φ ha massimo assoluto.

Esercizio 8. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x > -1$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x\dot{y} = -\frac{y}{x+1} + x, & x > -1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A φ ha un solo zero (nel suo dominio di definizione).
- ☐ B φ non ha zeri.
- ☐ C φ ha due zeri (nel suo dominio di definizione).
- ☐ D φ ha più di due zeri (nel suo dominio di definizione).

Esercizio 9. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x > -1$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{(x-1)y}{x+1} + x, & x > -1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Determinare l'insieme $F \doteq \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} \varphi(x) \text{ esiste finito} \right\}$.

- ☐ A $F =] -\infty, 0[$.
- ☐ B $F = \{-1\}$.
- ☐ C $F = [-1, 0[$.
- ☐ D $F =] -\infty, -1]$.

Esercizio 10. Sia $x \mapsto \varphi(x; c)$, $x > 0$, ($c \in \mathbb{R}$) l'integrale generale dell'equazione

$$\dot{y} + \frac{2y}{\sqrt{x}} = \frac{x \cos x}{e^{4(\sqrt{x})}}, \quad x > 0,$$

e si consideri il limite $\ell(c) \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x; c) e^{4(\sqrt{x})}}{x^2}$. Allora si ha:

- ☐ A $\ell(c) = 0$ per qualunque $c \in \mathbb{R}$.
- ☐ B Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = -\infty$.
- ☐ C Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 11. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x; \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} + y \tan x = 3e^{\sin x} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Determinare l'insieme $I \doteq \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varphi(x; \alpha) = +\infty \right\}$.

- ☐ A $I = \mathbb{R}$.
- ☐ B $I = \mathbb{R} \setminus \{3(1 - e)\}$.
- ☐ C $I = \emptyset$.
- ☐ D $I =]3(1 - e), +\infty[$.

Esercizio 12. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x; \alpha)$, $x > 0$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{(1-x)y}{x} + \tanh(\alpha x) \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x; \alpha)$. Allora si ha:

- ☐ A $\ell(\alpha) = -1 \quad \forall \alpha < 0$.
- ☐ B $\ell(\alpha) = 1 \quad \forall \alpha \neq 0$.
- ☐ C $\ell(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \leq 0$.
- ☐ D $\ell(\alpha) = +\infty \quad \forall \alpha > 0$.

Esercizio 13. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x \dot{y} = (1 - x \tan x)y + x^2 \cos x \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Allora si ha:

- ☐ A $\pi \dot{\varphi}(\pi) = \varphi(\pi)$.
- ☐ B $\pi \dot{\varphi}(\pi) = \varphi(\pi) - \pi^2$.
- ☐ C $\dot{\varphi}(\pi) = \varphi(\pi) - \pi$.
- ☐ D $\dot{\varphi}(\pi) = \pi^2 \varphi(\pi)$.

Esercizio 14. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il problema di Cauchy

$$(\mathbf{PC})_{\alpha} \quad \begin{cases} y \dot{y} = x(4 - y^2) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy $(\mathbf{PC})_{\alpha}$ ammette un'unica soluzione $x \mapsto \varphi(x; \alpha)$, $x > 0$, e si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x; \alpha) = 2$.
- B Per ogni $\alpha > 0$, il problema di Cauchy $(\mathbf{PC})_{\alpha}$ ammette un'unica soluzione $x \mapsto \varphi(x; \alpha)$, $x > 0$, e si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x; \alpha) = +\infty$.
- C Per ogni $\alpha < 0$, il problema di Cauchy $(\mathbf{PC})_{\alpha}$ ammette un'unica soluzione $x \mapsto \varphi(x; \alpha)$, $x > 0$, e si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x; \alpha) = 0$.
- D Se $\alpha = 0$, il problema di Cauchy $(\mathbf{PC})_0$ ammette due soluzioni $x \mapsto \varphi_1(x)$, $x \mapsto \varphi_2(x)$, $x > 0$, e si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = -4$.

Esercizio 15. Si consideri l'equazione

$$(\mathbf{E}) \quad \dot{y} \ln y = 2y \cos x.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- A Esiste una soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ $x \in \mathbb{R}$, di (E) tale che $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x) - 1}{\sqrt{1 + \sin x}} = 0$.
- B Esiste una soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ $x \in \mathbb{R}$, di (E) tale che $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x) - 1}{\sqrt{1 + \sin x}} = 2$.
- C Esiste una soluzione illimitata di (E).
- D Esiste una soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ $x \in \mathbb{R}$, di (E) che ha limite per $x \rightarrow +\infty$.

9.2 Soluzioni degli esercizi a risposta multipla

Es. 5 **B.**

Es. 6 **B.**

Es. 7 **D.**

Es. 8 **C.**

Es. 9 **D.**

Es. 10 **C.**

Es. 11 **D.**

Es. 12 **A.**

Es. 13 **B.**

Es. 14 **D.**

Es. 15 **B.**