Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti funzioni, determinare gli eventuali punti critici e stabilirne la natura studiando il segno della matrice Hessiana.

(a) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2x + 6y + 7\,;$

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy\,;$

(c) $f(x,y) = -2x^2 + 6xy - 4y^2 + 3x - 8y + 11\,;$

(d) $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 9x\,;$

(e) $f(x,y) = 3y + xy - 2y^3\,;$

(f) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy\,;$

(g) $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy\,;$

(h) $f(x,y) = y^3 - x^3 + 3xy\,;$

(i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy\,;$

(j) $f(x,y) = x^2y - x^3 + 4y\,;$

(k) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^4 - 4y\,;$

(l) $f(x,y) = 7y\,e^x\,;$

(m) $f(x,y) = xy\,e^{(x-y)}\,;$

(n) $f(x,y) = 4x^4 - 16xy^2 + x\,;$

(o) $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 - x^4 - y^4\,;$

(p) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\,;$

(q) $f(x,y) = (y-x)\,e^{-(x^2+y^2)}\,;$

(r) $f(x,y) = (x^2 - xy + y^2)\,e^{(x-3y)}\,;$

(s) $f(x,y) = \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}\,;$

(t) $f(x,y) = \dfrac{xy}{1 + x^4 + y^4}\,;$

(u) $f(x,y) = y\,e^{(x^3-y^3)}\,;$

(v) $f(x,y) = xy^2\,e^{-(x^2+y^2)}\,;$

(w) $f(x,y) = \sin(x+y)\,;$

(x) $f(x,y) = \sin x + \cos y\,;$

(y) $f(x,y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{27}{y} - x\,;$

(z) $f(x,y) = xy - 2x^2y^2\,;$

(a-b) $f(x,y) = x^3 + y^4 - 9x^2 - 8y^2\,;$

(a-c) $f(x,y) = e^{(x^3+y^4-9x^2-8y^2)}\,;$

(a-d) $f(x,y) = x\,\ln x + y\,\ln y\,.$

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti funzioni, determinare gli eventuali punti critici e stabilirne la natura <u>studiando direttamente il segno dell'incremento</u> della funzione <u>in un intorno del punto critico</u> considerato.

(a) $f(x,y) = x^4 + y^4\,;$

(b) $f(x,y) = x^4 - y^4\,;$

(c) $f(x,y) = (x-y^2)(x+4y^2)\,;$

(d) $f(x,y) = 6x^4 + 5x^2y + y^2\,;$

(e) $f(x,y) = (y-x^3)(y-x^2)\,;$

(f) $f(x,y) = x^4 - 8x^2y^2 + y^4\,;$

(g) $f(x,y) = x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3 + 1\,;$

(h) $f(x,y) = x^2y^3 - 2x^2y^4 - 3x^2y^3\,;$

(i) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2y^2\,;$

(j) $f(x,y) = 3xy^2 - 2x^2y^2 + xy^3\,;$

(k) $f(x,y) = 3x^2y^2 + y^2\,\ln(1+2x)\,;$

(l) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,.$

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti funzioni, determinare gli eventuali estremi relativi (locali) ed assoluti (globali), e determinare l'immagine della funzione.

(a) $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4\,;$

(b) $f(x,y) = xy\,e^{-(x^4+y^2)}\,;$

(c) $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2+y^2}\,;$

(d) $f(x,y) = \ln(1+xy)\,;$

(e) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,;$

(f) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{xy}\,, \qquad x\,y > 0\,;$

(g) $f(x,y) = \dfrac{y-x}{1+x^2+y^2}\,, \qquad x \geq 0\,;$

(h) $f(x,y) = 3x^2y^2 + y^2\,\ln(1+2x)\,;$

(i) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,;$

(j) $f(x,y) = \sinh(x^3 + 2x^2y^2 + 3y^4)\,, \qquad x \geq 0\,;$

(k) $f(x,y) = xy\,, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}\ :\ x^2+y^2 \leq 4\}\,;$

(l) $f(x,y) = \sinh(xy)\,, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}\ :\ x^2+y^2 \leq 4\}\,;$

(m) $f(x,y) = x^2 + 6xy + y^2\,, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}\ :\ x^2+y^2 \leq 4\}\,;$

(n) $f(x,y) = \sinh(x^2+6xy+y^2)\,, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}\ :\ x^2+y^2 \leq 4\}\,;$

(o) $f(x,y) = x^2y + 3xy^2 - xy\,,$
$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}\ :\ x+3y \leq 1,\quad x \geq 0,\quad y \geq 0\}\,;$

(p) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\,, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}\ :\ x^2+y^2 \leq 9\}\,;$

(q) $f(x,y) = (x+y)\,e^{-(x^2+y^2)}\,, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}\ :\ x^2+y^2 \leq 4\}\,;$

(r) $f(x,y) = e^{(9y^2-6xy-x)}\,, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ 2x+3y-7=0\}\,;$

(s) $f(x,y) = (3x+5y)^2\,, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ x^2+2y^2 \leq 4\}\,;$

(t) $f(x,y) = xy - 3(xy)^2\,, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ x^2+y^2 \leq 9\}\,;$

(u) $f(x,y) = \sin x \, \cos y\,,$
$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ x+y \leq 2\pi, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}\,;$

(v) $f(x,y) = \arccos\left(\frac{y}{x}\right)\,,$
$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq x \sin x\}\,;$

(w) $f(x,y) = x(y-1)\, e^{\left(\frac{x}{y}\right)}\,;$

(x) $f(x,y) = \ln(2+xy)\,, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ 4x^2+y^2 \leq 4\}\,;$

(y) $f(x,y) = x^4 - 12y^4\,, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ 2x+3y-7=0\}\,;$

(z) $f(x,y) = (x^2+9y^2)\, e^{-(x^2+9y^2)}\,;$

(a-b) $f(x,y) = 18x^2y^2\,(x^2-y^2) - 3x^2 + y^4\,,$
$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ y^2 - x^2 = \frac{1}{9}\}\,;$

(a-c) $f(x,y) = x\,(\ln x + 1) + y \ln y\,, \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ 2x+y-1=0\}\,;$

(a-d) $f(x,y) = (9x^2+2xy+16y^2)^2\,,$
$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ 9x^2+16y^2 \leq 144\}\,;$

(a-e) $f(x,y) = |y-2|(3-2y^2-x)\,,$
$(x,y) \in D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \ : \ \frac{(x-1)^2}{8} \leq y \leq \sqrt{1-x}\,\right\}.$