

Esercizio 1. Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(\frac{x+5}{x^2}\right); \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^2+5x+4}{x-1}}; \quad f(x) = \sqrt{\frac{7-x}{|-11+x|}}; \\ f(x) &= \sqrt{\ln x}; \quad f(x) = \ln\left(\frac{x^{13}}{2x-3}\right); \quad f(x) = \sqrt[3]{\ln(\ln x)}; \quad f(x) = e^{\frac{x^2+5x+4}{x}}; \\ f(x) &= e^{\frac{1}{x}} \cdot \sqrt[5]{e^x - 1}; \quad f(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{x^2 - 8}}; \quad f(x) = \arcsin(|x-1| - x^2); \\ f(x) &= \arctan \sqrt{x^2 + 5x + 4}; \quad f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 5 \sin x + 4}; \quad f(x) = \frac{\cosh x}{1 + \sinh x}. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Stabilire quali simmetrie eventualmente possiede il grafico delle seguenti funzioni definite nel loro dominio naturale (in particolare stabilire se sono pari o dispari). A tale scopo si ricordi che somme, prodotti e quozienti di funzioni pari sono funzioni pari (e si stabilisca che cosa accade nel caso in cui si stia considerando la somma, il prodotto e il quoziente di funzioni dispari, oppure di una funzione pari e di una funzione dispari).

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 5; \quad f(x) = x^3 + 2x; \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 3}; \quad f(x) = x^2 - x; \quad f(x) = |x^5|; \\ f(x) &= \operatorname{sgn}(x) \cdot e^{|x|}; \quad f(x) = \sqrt[3]{x} - x; \quad f(x) = \sqrt{(x+1)^2}; \quad f(x) = x \cdot \log(|x|); \\ f(x) &= e^{-x} - x; \quad f(x) = \sqrt[3]{|x|} \cdot \sin \frac{1}{x^2}; \quad f(x) = e^x - e^{-x^2}; \quad f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Stabilire quali delle seguenti funzioni (definite nel loro dominio naturale) sono monotone (specificando se in senso stretto o meno). A tale scopo si ricordi che somme e composizioni di funzioni crescenti sono funzioni crescenti (e si stabilisca che cosa accade nel caso in cui si stia considerando la composizione di funzioni decrescenti, oppure di funzione una crescente e di una funzione decrescente).

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + x^2); \quad f(x) = \ln(1 - x^3); \quad f(x) = x^3 + e^x; \quad f(x) = e^{-x} \cdot \cos \frac{1}{x}; \\ f(x) &= e^{|x|} - e^{-x}; \quad f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot e^{|x|}; \quad f(x) = \arctan(x^2); \quad f(x) = \arctan(x^3). \end{aligned}$$

Esercizio 4. Stabilire se è possibile definire la funzione composta $f \circ g$ oppure $g \circ f$ (ed eventualmente calcolarla) per le seguenti coppie di funzioni definite nel loro dominio naturale.

(a) $f(x) = \arccos x, \quad g(x) = x^2 + 1;$

(b) $f(x) = \arccos x, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2};$

(c) $f(x) = \log x, \quad g(x) = x^2;$

(d) $f(x) = \log x, \quad g(x) = x^3;$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = x + 1;$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = |x + 1|;$

(g) $f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad g(x) = x^3;$

(h) $f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad g(x) = \cosh x.$

Esercizio 5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + \operatorname{sgn}(x)$.

- (i) Tracciare il grafico di f e determinare l'immagine $f(\mathbb{R})$.
- (ii) Stabilire se f è strettamente crescente e se è invertibile.
- (iii) Nel caso f sia invertibile, determinare la sua funzione inversa f^{-1} (esplicitandone dominio di definizione e legge funzionale) e tracciarne il grafico.

Esercizio 6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

- (i) Osservando che f è dispari, tracciare il grafico di f e determinare l'immagine $f(\mathbb{R})$.
- (ii) Stabilire se f è strettamente crescente e se è invertibile.
- (iii) Nel caso f sia invertibile, determinare la sua funzione inversa f^{-1} (esplicitandone dominio di definizione e legge funzionale) e tracciarne il grafico.

Esercizio 7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in]-\infty, 1[, \\ x^2 & \text{se } x \in [1, 4[, \\ 2^x & \text{se } x \in [4, +\infty[. \end{cases}$$

- (i) Tracciare il grafico di f e determinare l'immagine $f(\mathbb{R})$.
- (ii) Stabilire se f è strettamente crescente e se è invertibile.
- (iii) Nel caso f sia invertibile, determinare la sua funzione inversa f^{-1} (esplicitandone dominio di definizione e legge funzionale) e tracciarne il grafico.

Esercizio 8. Siano $a, b \in \mathbb{R}^+$ ($a \neq b$) fissati, e si consideri la funzione f definita da $f(x) = \frac{x-a}{x-b}$.

- (i) Determinare il dominio naturale $\text{Dom}(f)$ e l'immagine $f(\mathbb{R})$ di f , e tracciarne il grafico (mettendo in evidenza eventuali intersezioni con gli assi cartesiani) distinguendo i due casi $a < b$ ed $a > b$.
- (ii) Supponendo che $a < b$, stabilire se f è strettamente decrescente e se è invertibile.
- (iii) Sotto l'ipotesi $a < b$, nel caso f sia invertibile determinare la sua funzione inversa f^{-1} (esplicitandone dominio di definizione e legge funzionale) e tracciarne il grafico (mettendo in evidenza eventuali intersezioni con gli assi cartesiani).

Esercizio 9. Si consideri la funzione $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{se } x \in [-2, -1[, \\ x & \text{se } x \in [-1, 1], \\ 4-x & \text{se } x \in]1, 2]. \end{cases}$$

- (i) Tracciare il grafico di f e determinare l'immagine $f(\mathbb{R})$.
- (ii) Stabilire se f è strettamente monotona e se è invertibile.
- (iii) Nel caso f sia invertibile, determinare la sua funzione inversa f^{-1} (esplicitandone dominio di definizione e legge funzionale) e tracciarne il grafico.

Esercizio 10. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot 2^{|x|}$.

- (i) Tracciare il grafico di f e determinare l'immagine $f(\mathbb{R})$.
- (ii) Stabilire se f è strettamente crescente e se è invertibile.
- (iii) Nel caso f sia invertibile, determinare la sua funzione inversa f^{-1} (esplicitandone dominio di definizione e legge funzionale) e tracciarne il grafico.

Esercizio 11. Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A Se f è pari allora è invertibile.
- ☐ B Se f è invertibile allora è strettamente monotona.
- ☐ C Se f è decrescente allora $f \circ f$ è decrescente
- ☐ D Se f è pari e monotona allora è costante.

2.2 Soluzioni degli esercizi a risposta multipla

Es. 11 D .