Esercizio 1. Scrivere la <u>definizione formale</u> dei seguenti limiti (formulandola sia tramite le successioni che tramite gli intorni):

(a) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to 3} f(x) = -5\,;$

(b) $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to -1} f(x) = \sqrt{2}\,;$

(c) $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0\,;$

(d) $f :]-\infty, -1] \to \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -2\,;$

(e) $f :]-2, 2[\to \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to -2} f(x) = -\infty\,;$

(f) $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty\,;$

(g) $f : [3, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty\,;$

(h) $f :]0, 3[\to \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to 3} f(x) = -\infty\,;$

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,;$

(l) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty\,.$

Esercizio 2. Utilizzando la definizione formale di limite formulata tramite gli intorni verificare che:

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0\,; \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\,; \quad \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\,;$$

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = 1\,; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0\,; \quad \lim_{x\to 2} x^3 = 8\,;$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = +\infty\,; \quad \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty\,; \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty\,.$$

Esercizio 3. Ricordando i seguenti limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,, \tag{5.1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\,, \tag{5.2}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,, \tag{5.3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\,, \tag{5.4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\,, \tag{5.5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha\,, \qquad (\alpha\in\mathbb{R})\,, \tag{5.6}$$

utilizzando eventualmente il <u>confronto asintotico</u> tra funzioni

$$f_1\sim g_1,\;\; f_2\sim g_2 \quad \text{per} \quad x\to x_0 \qquad\Longrightarrow\qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{g_2(x)} \tag{5.7}$$

e la <u>gerarchia degli infiniti</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}\frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha}&=0 \qquad \forall\,\alpha,\beta>0\,,\;a>1\,,\\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}&=0 \qquad \forall\,\alpha>0,\;a>1\,,\end{aligned} \tag{5.8}$$

stabilire quale dei seguenti limiti esiste (finito o infinito), ed in tal caso calcolarne il valore:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}\,;\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4}\,;\quad \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\,;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\,;$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{|x+2|}{x+2}\,;\quad \lim_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|3x+1|}{x}\,;\quad \lim_{x\to\sqrt{2}-}\frac{|x-\sqrt{2}|}{x^2-2}\,;\quad \lim_{x\to\sqrt{2}+}\frac{|x-\sqrt{2}|}{x^2-2}\,;$$

$$\lim_{x\to -2-}\frac{|x+2|}{x+2}\,;\quad \lim_{x\to -2+}\frac{|x+2|}{x+2}\,;\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3-7x^2+5}{9+2x-7x^3}\,;\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-5}{x-x^2}\,;$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2+\sin x}{3x^2+\cos x}\,;\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{5x^2+2x-1}}\,;\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{5x^2+2x-1}}\,;\quad \lim_{x\to -2+}\lfloor x\rfloor\,;$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x\sqrt{x+2}\left(1-\sqrt{3x+5}\right)}{5x^2-3x+7}\,;\quad \lim_{x\to -2-}\lfloor x\rfloor\,;\quad \lim_{x\to 2}\left\lfloor\frac{1-x}{2}\right\rfloor\,;\quad \lim_{x\to -2}\lfloor x\rfloor\,;\quad \lim_{x\to -2.5}\lfloor x\rfloor\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3e^x}{x+\sqrt{-x}}\,;\quad \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right);\quad \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\,;\quad \lim_{x\to0}\frac{\tan x+x^2}{\sin^3 x+2x}\,;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x^2)}{x\,(e^{2x}-1)}\,;\quad \lim_{x\to0+}\sin x\cos\left(\frac{1}{x}\right);\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-2x^3+3}{2x^3-5x^2+x}\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-5x^2+x}{x^5-2x^3+3}\,;\quad \lim_{x\to0+}\frac{\sin(2x)-x+x^5}{x^2-5x}\,;\quad \lim_{x\to0+}\frac{\cos(3x)-1+x^2+x^5}{e^{x^2}-1+7x^2-5x^3}\,;$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x^2)-3x^4+x^3}{\sqrt{1+2x^2}-1}\,;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+|\sin x|}{x}\right)^x;\quad \lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\,;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+x\sin x}{1-\cos x}\,;\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\,;\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{1}{\cos x}-\tan x\right);\quad \lim_{x\to0+}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x+2}{1+x}\right);$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right);\quad \lim_{x\to0+}\frac{2x^3-5x^2+x}{x^5-2x^3}\,;$$

(il simbolo $\lfloor\alpha\rfloor$ denota la parte intera di α, cioè quell'unico numero intero $\lfloor\alpha\rfloor$ che soddisfa le disuguaglianze $\lfloor\alpha\rfloor\le\alpha<\lfloor\alpha\rfloor+1$) .

Esercizio 4. (N.B. non richiesto per la prima prova parziale) Utilizzando eventualmente il confronto asintotico tra funzioni (5.7), la gerarchia degli infiniti (5.8), ed i seguenti sviluppi asintotici delle principali funzioni elementari

$$\sin x = x+o(x)\qquad \text{per}\quad x\to0\,, \tag{5.9}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x)\qquad \text{per}\quad x\to0\,, \tag{5.10}$$

$$\arctan x = x+o(x)\qquad \text{per}\quad x\to0\,, \tag{5.11}$$

$$\ln(1+x) = x+o(x)\qquad \text{per}\quad x\to0\,, \tag{5.12}$$

$$e^x = 1+x+o(x)\qquad \text{per}\quad x\to0\,, \tag{5.13}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+o(x)\qquad \text{per}\quad x\to0\,,\qquad (\alpha\in\mathbb{R})\,, \tag{5.14}$$

stabilire quale dei seguenti limiti esiste (finito o infinito), ed in tal caso calcolarne il valore:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{\tan x\cdot\sin x}\,;\quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(2-\cos x)}{\sin^2 x+3x^2-7x^3}\,;\quad \lim_{x\to0+}\frac{e^{\sin x}+2x+x^2}{\ln(1+x)}\,;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(x+x^2)-1+x^4+x^2}{e^{(3x^2+x^3)}-1}\,;\quad \lim_{x\to0}\frac{(\cos(2x)-1)(\sin(x^2)+x^2)}{(e^{x^4}-1+2x^4+4x^5)\,e^{3x}}\,;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x((1+x)^{\frac{1}{3}}+5x-x^2)}{e^{x^2}-1+3x^2+x^3}\,;\quad \lim_{x\to0+}\frac{x\,e^x}{x^2\,(e^x+e^{-x}-2)}\,;\quad \lim_{x\to0}\frac{x\,e^x}{x^2\,(e^x+e^{-x}-2)}\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\left(1+\frac{1}{3x^2}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right); \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1+2x^2}{\sin^2 x+5x^2}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^6-e^{\sin x}}{1-\cos(x^2+3x)}.$$

Esercizio 5. (N.B. non richiesto per la prima prova parziale) Utilizzando eventualmente il confronto asintotico tra funzioni (5.7), la gerarchia degli infiniti (5.8), ed i seguenti sviluppi asintotici delle principali funzioni elementari

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4) \qquad \text{per} \quad x\to 0\,, \tag{5.15}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5) \qquad \text{per} \quad x\to 0\,, \tag{5.16}$$

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^4) \qquad \text{per} \quad x\to 0\,, \tag{5.17}$$

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^4) \qquad \text{per} \quad x\to 0\,, \tag{5.18}$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3) \qquad \text{per} \quad x\to 0\,, \tag{5.19}$$

$$e^x = 1+x+o(x) \qquad \text{per} \quad x\to 0\,, \tag{5.20}$$

$$\sinh x = x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3) \qquad \text{per} \quad x\to 0\,, \tag{5.21}$$

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4) \qquad \text{per} \quad x\to 0\,, \tag{5.22}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2}+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!}+o(x^3) \qquad \text{per} \quad x\to 0 \qquad (\alpha\in\mathbb{R})\,, \tag{5.23}$$

stabilire quale dei seguenti limiti esiste (finito o infinito), ed in tal caso calcolarne il valore:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\ln(\cos x)}{x^4}; \quad \lim_{x\to 0+}\frac{\sin(2x)-\tan(2x+x^2)}{x\,(1-\cos^2 x)}; \quad \lim_{x\to 0}(e^{5x}+x^2)^{\frac{1}{x}};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x^2)-\ln(1+x^2)}{x^2\,(e^{x^2}-1)}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(e^x\cos x)}{x\sin x}; \quad \lim_{x\to 0+}\frac{x^x-x^{\sin x}}{x\,(\ln(1+x)-x)};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2x}-(8x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}; \quad \lim_{x\to+\infty} 2x(x-1)-x^3\ln\left(1+\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right);$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin x+1)^{\frac{1}{x}}; \quad \lim_{x\to 0+}\frac{\cos x\,(x^x-1-x\ln x)}{x^{2x}-1-2x\ln x}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}\ln(1-x)-1}{\cosh x-\cos x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)-\sin^2 x}{e^{5x}\,(1-\cos x + x^4)}\,; \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}-e}{x\ \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\,.$$

Esercizio 6. Si consideri una funzione $f:]-\alpha,\,\alpha[\to\mathbb{R}$, tale che $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=-2$. Si ha:

A $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=0 \quad e \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\neq 0$.

B $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=0 \quad e \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

C $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x)=+\infty \quad e \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

D $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 \quad e \quad \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x^3}=+\infty$.

Esercizio 7. Date due funzioni $f,\,g:]\alpha,\,+\infty[\to\mathbb{R}$ ovunque non nulle, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A Se $f\sim g$ per $x\to+\infty$, allora si ha $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x)=0$.

B Se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x)=0$, allora si ha $f\sim g$ per $x\to+\infty$.

C Se $f\sim g$ per $x\to+\infty$, allora si ha $e^f\sim e^g$ per $x\to+\infty$.

D Se $f\sim g$ per $x\to+\infty$ e g è limitata, allora si ha $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x)=0$.

Esercizio 8. Si consideri una funzione $f:]0,\,1[\to\mathbb{R}$, tale che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt{2}$. Si ha:

A $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x)=0$.

B $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x)=\sqrt{2}$.

C $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x)$ può non esistere.

D $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f(x)=+\infty$.

Esercizio 9. Si considerino le funzioni $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (\cos x - 1)$, $g(x) = x^2$. Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ f e g sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to 0$.

$\boxed{\text{B}}$ $f \sim g$ per $x \to 0$.

$\boxed{\text{C}}$ f e g non sono confrontabili per $x \to 0$.

$\boxed{\text{D}}$ f e un infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to 0$.

Esercizio 10. Stabilire quale delle seguenti funzioni è prolungabile con continuità (ammette un'estensione continua) in $x = 0$:

$\boxed{\text{A}}$ $f(x) = e^{-1/x}$.

$\boxed{\text{B}}$ $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\boxed{\text{C}}$ $f(x) = e^{1/|x|}$.

$\boxed{\text{D}}$ $f(x) = e^{-1/x^2}$.

Esercizio 11. Data una funzione $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ Se f è continua in $]a,\, b[$, allora è limitata.

$\boxed{\text{B}}$ Se f è illimitata in $[a,\, b]$, allora ha almeno un punto di discontinuità.

$\boxed{\text{C}}$ Se f è continua in $]a,\, b[$, ed $f(a) = a$, $f(b) = b$, allora f ha uno zero in $[a, b]$.

$\boxed{\text{D}}$ Se f è limitata in $[a,\, b]$, allora ha un punto di massimo assoluto.

Esercizio 12. Data la funzione $f : [0,\, 2] \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ Il massimo di f è 1, il minimo non esiste.

$\boxed{\text{B}}$ Il massimo di f è 2, il minimo è zero.

$\boxed{\text{C}}$ Il massimo di f è $\frac{1}{2}$, il minimo è zero.

$\boxed{\text{D}}$ Il massimo di f è $\frac{1}{2}$, il minimo non esiste.

Esercizio 13. Si consideri la funzione $f :]0,\, 6] \to \mathbb{R}$, definita da $x^2 - 4x + 2$. Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ f ha minimo e massimo assoluto.

$\boxed{\text{B}}$ f non ha minimo assoluto.

$\boxed{\text{C}}$ f non ha massimo assoluto.

$\boxed{\text{D}}$ f non ha nè minimo nè massimo assoluto.

Esercizio 14. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ Se f è invertibile allora è limitata.

$\boxed{\text{B}}$ Se f è invertibile allora è continua.

$\boxed{\text{C}}$ Se f è invertibile allora è monotona.

$\boxed{\text{D}}$ Se f è continua ed invertibile allora è strettamente monotona.

Esercizio 15. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ f ha infiniti punti di massimo e minimo assoluto.

$\boxed{\text{B}}$ f ha al più un punto di massimo assoluto ed un punto di minimo assoluto.

$\boxed{\text{C}}$ f ha punti di massimo assoluto ma non ha punti di minimo assoluto.

$\boxed{\text{D}}$ f è illimitata.

Esercizio 16. Determinare gli eventuali <u>asintoti</u> (<u>orizzontali, verticali ed obliqui</u>) delle seguenti funzioni (definite nei loro domini naturali):

$$f(x) = \frac{x+5}{(x-3)(x+4)}\,; \quad f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{2x+1}\right); \quad f(x) = |x+6|\, e^{\frac{x+1}{x}}\,;$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right); \quad f(x) = \frac{x^3+x-1-|x-1|}{x^2+4}\,; \quad f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$f(x) = \frac{|x|}{x}\,; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-x}\,; \quad f(x) = \frac{2x-5}{|3x+2|}\,; \quad f(x) = e^{1/x}\,;$$

$$f(x) = e^{1/x}\,; \quad f(x) = \frac{2x^2+3}{x-1}\,; \quad f(x) = \sqrt[3]{|x^3-x^2|}\,;$$

Esercizio 17. Si considerino le funzioni **(a), (b), (c), (d)** dell'esercizio 1 del Cap. 3. Per ciascuna di queste funzioni, si stabilisca se esistono i limiti unilateri (destro e sinistro) e bilateri negli estremi degli intervalli che compaiono nella definizione della funzione, ed in tal caso se ne calcoli il valore. Si determinino inoltre eventuali asintoti (orizzontali, verticali ed obliqui) di queste funzioni.

Esercizio 18. Stabilire quale delle seguenti funzioni ammette la retta $y = x$ come asintoto obliquo (unilatero) per $x \to +\infty$.

[A] $f(x) = x + \ln x$.

[B] $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$.

[C] $f(x) = x + \sin x$.

[D] $f(x) = x + \dfrac{\sin x}{x}$.

Esercizio 19. Si consideri una funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, che soddisfi le disuguaglianze

$$5x \leq f(x) \leq 5x + \frac{1}{3x} \qquad \forall\, x \geq 0\,.$$

Si ha:

[A] f ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

[B] f non ha asintoti.

[C] f ammette un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

[D] f ammette un asintoto verticale in un punto $x_0 > 0$.

5.2 Soluzioni degli esercizi a risposta multipla

Es. 6 **B .**

Es. 7 **D .**

Es. 8 **C .**

Es. 9 **C .**

Es. 10 **D .**

Es. 11 **B .**

Es. 12 **C .**

Es. 13 **A .**

Es. 14 **D .**

Es. 15 **A .**

Es. 18 **D .**

Es. 19 **C .**