

Esercizio 1. Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni e stabilire se questi insiemi sono aperti, chiusi, limitati, connessi:

(a) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$;

(b) $f(x, y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$;

(c) $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x + y - 1}{x - y + 1}\right)$;

(d) $f(x, y) = \sqrt{(x^2 - y^2)} + \ln(1 - x^2 - y^2)$;

(e) $f(x, y) = \arcsin(x^2 + 4y^2 - 2)$;

(f) $f(x, y) = \sqrt{3y - y^2 - 2}$;

(g) $f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2 + y}{4 - x^2 - y^2}\right)$;

(h) $f(x, y) = \frac{\sqrt{3x + x^2}}{2x + y} + \ln\left(\frac{xy}{2 - x}\right)$;

(i) $f(x, y) = e^{\frac{x+y}{x-y}} \sqrt{x^2 - y}$.

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti funzioni:

(i) Determinare il dominio naturale D e stabilire se D è aperto, chiuso, connesso (e nel caso non sia connesso, determinare le sue componenti connesse).

(ii) Studiare il segno della funzione: determinare l'insieme degli zeri $\{f = 0\}$ e l'insieme di positività $\{f > 0\}$ (utilizzando eventualmente il teorema degli zeri per funzioni continue definite su un insieme connesso).

(a) $f(x, y) = x^2y + 2y^3 - 4y$;

(b) $f(x, y) = x^3y - 2xy^3 - xy$;

(c) $f(x, y) = \frac{e^{\sqrt{x \ln(1+xy)}}}{y(x-1) - \ln x}$;

(d) $f(x, y) = \frac{\ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2}) - \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$;

(e) $f(x, y) = \ln(\cos(x^2 + y^2));$

(f) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{\ln(\ln(x^2 + y^2))}{x^2 + 2y^2 + 1}\right).$

Esercizio 3. Stabilire quale dei seguenti limiti esiste (finito o infinito) ed in tal caso calcolarne il valore:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{3x}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + 3y^2}}{|xy|}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + 3y^2}; \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (xy)^3 e^{-\frac{x}{y}}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin(xy) \cos\left(\frac{1}{xy}\right); \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 + 2x^2}{3x - 2y^3}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^3(y-1)^2}{x^2 + 3(y-1)^2}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}; \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|}{xy}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (xy) \ln |xy|; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (xy) \ln |x^2 + y^2|; \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{e^{(x+y)} - 1}{2x + 2y}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{x^3 - xy + 3y^3}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arctan\left(\frac{y+x}{x}\right); \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + 3y^5}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + 3y^4}{1 - \cos(xy)}; \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + 3y^5}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{x^2 + 2y^2}; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+x^2y^3)}{2x^2 + |xy|}; \\ & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}; \quad \lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} \frac{x+y}{x^2 + 2y^2}; \quad \lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+xy)}{x^2 + 2y^2}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Per ciascuna delle seguenti funzioni:

- (i) Determinare il dominio naturale D e l'insieme dei punti C in cui la funzione è continua.
- (ii) Determinare l'insieme dei punti della frontiera di D in cui è possibile estendere con continuità la funzione.

(a) $f(x, y) = (xy) \ln |xy|;$

(b) $f(x, y) = \frac{x}{y^2} (e^{\frac{y^2}{x}} - 1);$

$$(c) \quad f(x, y) = \frac{xy \cos(xy)}{|xy|};$$

$$(d) \quad f(x, y) = \frac{\ln(1 + \sin(x^2 + y^2))}{x^2 + y^2};$$

$$(e) \quad f(x, y) = \arctan\left(\frac{x+y}{x^2 + 3y^2}\right);$$

$$(f) \quad f(x, y) = \ln(1 + xy) \arctan\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$(g) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^2 - y)}{y} & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

$$(h) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{(x+y)} - 1 - x - y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ \frac{1}{2} & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A f è continua.
- ☐ B La restrizione di f al dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y\}$ è continua.
- ☐ C La restrizione di f al dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x\}$ è continua.
- ☐ D Non esiste nessun dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ per cui f ristretta a D risulti continua.

Esercizio 6. Fissati $\alpha, \beta > 0$, si consideri il limite

$$L_{\alpha,\beta} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2}.$$

Si ha:

- ☐ A $L_{\alpha,\beta}$ esiste finito per ogni $\alpha, \beta > 0$;
- ☐ B $L_{\alpha,\beta}$ esiste finito se $\alpha + \beta = 2$;
- ☐ C Esiste una sola coppia di $\alpha, \beta > 0$ per cui $L_{\alpha,\beta}$ esiste finito;
- ☐ D $L_{\alpha,\beta}$ esiste finito se $\alpha + \beta > 2$.

1.2 Soluzioni degli esercizi a risposta multipla

Es. 5 **B.**

Es. 6 **D.**