Esercizio 1. Scrivere la definizione formale di limite per le seguenti successioni:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\sqrt{3}\,; \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \pi\,; \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty\,; \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\,.$$

Esercizio 2. Utilizzando la definizione di limite verificare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty\,; \quad \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1\,; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0\,;$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1\,; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0\,; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n+4}{2n-1} = \frac{1}{2}\,;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \log_3 n = +\infty\,; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n}{(n-1)^2} = 1\,.$$

Esercizio 3. Utilizzando eventualmente il confronto asintotico tra successioni

$$a_n \sim c_n,\;\; b_n \sim d_n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{d_n} \tag{4.1}$$

e la gerarchia degli infiniti

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log_a n)^\beta}{n^\alpha} &= 0 \qquad \forall\, \alpha,\, \beta > 0\,,\; a > 1\,,\\
\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} &= 0 \qquad \forall\, \alpha > 0,\; a > 1\,,\\
\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} &= 0 \qquad \forall\, a > 1\,,\\
\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} &= 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

stabilire quale delle seguenti successioni è regolare (ammette limite finito o infinito), ed in tal caso calcolarne il limite:

$$\frac{n^3+2n^4+1}{3n+7}\,; \quad \frac{5n^3+\sqrt{n}+1}{3n^3+n^2+1}\,; \quad \frac{\sqrt{3n^3+1}}{\sqrt{n^3-2}}\,; \quad \frac{n+\ln^2 n}{3n^2+2\ln^4 n}\,; \quad \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n;$$

$$\frac{(n+2)^3+(2n-3)^5}{8n^5+n^3+7}\,; \quad \frac{2^n+\ln^3 n+2}{n^3+e^n+2}\,; \quad \frac{n^2+3^n+\sqrt{n}}{n^{11}+7}\,; \quad \frac{e^{-n}+\sqrt{n}+(-1)^n}{n^3+\ln n^2}\,;$$

$$\frac{(-1)^n\sqrt{n}+2n}{\ln n^2+e^n+3}\,; \quad \left(\frac{1+n}{n^3}\right)^{n^2}; \quad \frac{\cos n}{n}\,; \quad \sqrt{n}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right); \quad \frac{e^n\cdot\cos n+2n^2}{n^3+\ln n}\,;$$

$$\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2}\,; \quad \sqrt[3]{(n^2+1)}-\sqrt[3]{n^2}\,; \quad \sqrt[n]{n^2}\,; \quad \frac{\sqrt[n]{n}+1}{n}\,; \quad \frac{n\cdot 2^{-n}+n}{3n+\sqrt[3]{n}}\,;$$

$$\frac{n!}{n^{n-1}+n^3}(*)\,; \quad \frac{\cos n+n\cdot(-1)^n}{n^2}\,; \quad \frac{(n+1)!}{(n-1)\cdot(n-1)!}\,; \quad \frac{2^{n+1}}{n!}\,; \quad \frac{(-2)^n}{n^5}\,;$$

$$\ln n - 3\sqrt{n}\,; \quad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n; \quad \frac{2^{\sqrt{n}}}{n}\,; \quad \frac{\ln\left(\frac{1}{n^5}\right)}{n^2}\,; \quad \sqrt{n^2+2n}-n\,; \quad \frac{\ln n}{(2+\cos n)^n}\,.$$

(*) Suggerimento: $\frac{n!}{n^{n-1}} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot 2}{n\cdot n\cdot\dots\cdot n} \leq \frac{2}{n}$.

Esercizio 4. La successione di termine generale $a_n = n\cos n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ è:

- A divergente.
- B irregolare.
- C illimitata.
- D convergente.

Esercizio 5. La successione di termine generale $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{se } n \text{ pari} \\ 2^n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$ è:

- A irregolare.
- B infinitesima.
- C limitata.
- D divergente.

Esercizio 6. Si considerino le successioni di termine generale $a_n = 2^{-n} + n^2$, $b_n = (3n^2+5n)\cdot\cos\left(\frac{1}{n}\right)$. Si ha:

- A $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ non sono confrontabili.
- B $\{a_n\}_n$ è infinita di ordine superiore a $\{b_n\}_n$.
- C $\{a_n\}_n \sim \{b_n\}_n$.
- D Nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 7. La successione di termine generale $a_n = \dfrac{e^n}{1+e^n}$ è:

- A strettamente crescente.
- B strettamente decrescente.
- C illimitata.
- D infinitesima.

Esercizio 8. Determinare l'insieme I di tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la successione di termine generale $a_n = \dfrac{(n+\ln n)^\alpha}{n^3+2\sqrt{n}+e^{-n}}$ è infinitesima.

$\boxed{\text{A}}$ $I = \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{B}}$ $I =]-\infty, 3[$.

$\boxed{\text{C}}$ $I =]0, 3[$.

$\boxed{\text{D}}$ $I =]-\infty, 0[$.

Esercizio 9. La successione di termine generale $a_n = \left(\dfrac{1}{3+\cos n}\right)^n$ è:

$\boxed{\text{A}}$ illimitata

$\boxed{\text{B}}$ irregolare

$\boxed{\text{C}}$ infinitesima.

$\boxed{\text{D}}$ convergente a $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esercizio 10. Date due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ Se $a_n \sim b_n$, allora $e^{a_n} \sim e^{b_n}$.

$\boxed{\text{B}}$ Se $a_n \sim b_n$, allora la successione $c_n = a_n - b_n$ è infinitesima.

$\boxed{\text{C}}$ Se la successione $c_n = a_n - b_n$ è infinitesima, allora $a_n \sim b_n$.

$\boxed{\text{D}}$ Se $a_n \sim b_n$ e $b_n \neq 0$ definitivamente, allora anche $a_n \neq 0$ definitivamente.

Esercizio 11. Si considerino una funzione $f :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ continua in $x = 0$, tale che $f(0) = \pi$, e la successione di termine generale $a_n = \sqrt{n} \cdot \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ La successione $\{f(a_n)\}_n$ è infinitesima.

$\boxed{\text{B}}$ La successione $\{f(a_n)\}_n$ è convergente a π.

$\boxed{\text{C}}$ La successione $\{f(a_n)\}_n$ è irregolare.

$\boxed{\text{D}}$ Non è possibile stabilire il comportamento della successione $\{f(a_n)\}_n$ in base alle informazioni disponibili.

Esercizio 12. Sia $\{a_n\}_n$ una successione infinitesima, definitivamente non nulla. Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ Se $\{a_n\}_n$ è defintivamente positiva, allora $\left\{e^{\left(\frac{1}{a_n}\right)}\right\}_n$ è infinitesima.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\{a_n\}_n$ è defintivamente negativa, allora $\left\{e^{\left(\frac{1}{a_n}\right)}\right\}_n$ è infinita.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\{a_n\}_n$ è defintivamente negativa, allora $\left\{e^{\left(\frac{1}{a_n}\right)}\right\}_n$ è convergente a 1.

$\boxed{\text{D}}$ Se $a_n > 0$ per n pari ed $a_n < 0$ per n dispari, allora $\left\{e^{\left(\frac{1}{a_n}\right)}\right\}_n$ è indeterminata.

Esercizio 13. Se $\{a_n\}_n$ è una successione divergente a $+\infty$, allora la successione di termine generale $b_n = \dfrac{a_n}{1 + a_n}$ è:

$\boxed{\text{A}}$ convergente a 1.

$\boxed{\text{B}}$ strettamente crescente.

$\boxed{\text{C}}$ illimitata.

$\boxed{\text{D}}$ Non è possibile stabilire il comportamento della successione $\{b_n\}_n$ in base alle informazioni disponibili.

4.2 Soluzioni degli esercizi a risposta multipla

Es. 4 **D .**

Es. 5 **A .**

Es. 6 **D .**

Es. 7 **A .**

Es. 8 **B .**

Es. 9 **C .**

Es. 10 **D .**

Es. 11 **B .**

Es. 12 **D .**

Es. 13 **A .**