Introduzione alle Equazioni alle Derivate Parziali, L.M. in Matematica, A.A. 2014-2015.

Esercizi su funzioni armoniche e laplaciano 1.

Esercizio 1. Sia $u \in \mathcal{C}^2(B(0,R)) \cap \mathcal{C}(\overline{B(0,R)})$ armonica in $B(0,R)$.

(1) **(diseguaglianza di Harnack)** Sia $u \geq 0$. Mostrare che per ogni $x \in B(0,r) \subset B(0,R)$
$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} u(0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r} u(0).$$

(2) **(lemma di Hopf)** Sia $x_0 \in \partial B(0,R)$ un punto di massimo stretto per u, i.e. $u(x) < u(x_0)$ per ogni $x \in B(0,R)$. Sia $n(x_0) = \frac{x_0}{R}$ la normale esterna a B in x_0. Mostrare che
$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{u(x_0) - u(x_0 - hn(x_0))}{h} \geq \frac{u(x_0) - u(0)}{2^{n-1}R} > 0.$$
Se $\frac{\partial u}{\partial n}$ esiste in x_0, mostrare che
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0.$$

Esercizio 2. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ armonica.

(1) Mostrare che se $\lim_{|x| \to +\infty} \frac{|u(x)|}{|x|} = 0$, u è costante.

(2) Siano $k \in \mathbf{N}$ e $M > 0$ tali che
$$\frac{|u(x)|}{|x|^k + 1} \leq M \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$
Mostrare che u è un polinomio di grado al massimo k.

Esercizio 3. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ armonica.

(1) Mostrare che se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, per un qualche $p \in [1, +\infty)$, allora $u \equiv 0$.

(2) Mostrare che se $|Du| \in L^2(\mathbb{R}^n)$ allora u è costante.

Suggerimento 2 $|u|^p$ è subarmonica.. (per la diseguaglianza di Jensen).

Esercizio 4. Sia u_n una successione di funzioni armoniche non negative in Ω aperto connesso. Mostrare che se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che la serie $\sum_n u_n(x_0)$ converge allora la serie di funzioni $\sum_n u_n$ converge uniformemente nei compatti di Ω.