

Esercizi su funzioni armoniche e laplaciano 2.

Esercizio 1.

- (1) Mostrare che ogni funzione convessa $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è subarmonica.
- (2) Dare un esempio di funzione subarmonica non convessa.
- (3) Mostrare che una funzione convessa e superarmonica è una funzione lineare.

Suggerimento: se u è convessa allora è continua e per ogni $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ e per ogni y con $|y| = r$ $u(x) \leq \frac{1}{2}u(x+y) + \frac{1}{2}u(x-y)$.

Esercizio 2. Sia $u \in C(\mathbb{R}^2)$ una funzione superarmonica tale che $u(x) \geq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.
Mostrare che u è costante.

Mostrare che in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ esistono funzioni superarmoniche limitate e non costanti.

Esercizio 3.

- i) Sia $\beta \geq 0$. Trovare una soluzione $u_\beta \in \mathcal{C}^2(B(0, R)) \cap \mathcal{C}(\overline{B(0, R)})$ del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^\beta & |x| < R \\ u = 0 & |x| = R. \end{cases}$$

- ii) Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e limitato e $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ la soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Mostrare che

$$u(x) \geq \frac{1}{2n}(\text{dist}(x, \partial\Omega))^2.$$

Suggerimento i) Cercare una soluzione radiale $u(x) = f(|x|)$ con $f \in \mathcal{C}^2([0, R], f \in \mathcal{C}([0, R]))$.

ii) Osservare che $u \geq 0$ in Ω . Per $x \in \Omega$ e $r = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, considerare lo stesso problema di Dirichlet in $B(x, r) \subseteq \Omega$. Costruire una soluzione (usando i) con $\beta = 0$) e metterla a confronto con u .

Esercizio 4. Sia

$$B^+(0, R) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < R^2, x_n > 0\}.$$

Scrivere una formula di rappresentazione della soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & x \in B^+(0, R), \\ u(x) = x_n^2 & x \in \partial B^+(0, R). \end{cases}$$