

1

Introduzione alle EDP - 2014-15

- Docenti: Cesaroni, Ancona
- Orario (LUN: 9.30-11.15 - MAR: 8.45-11.00)
↓
(8.45-10.00 / 10.15-11.00)
- Mobilità esame e date
- Info corso: www.math.unipol.it/~cesar/introedp2.html
(cenni programma $\leftrightarrow$ sarà aggiornato)
- Testi: S. Salsa: Equazioni a derivate parziali:
Metodi, modelli e applicazioni:
Springer, Unitext, 2010, 2^a ediz.
L.C. Evans: Partial Differential Equations
AMS 2010, 2nd edition

-
- EDP sono modelli matematici che appaiono nella descrizione di gran parte dei fenomeni delle scienze applicate:

fisica, chimica, biologia, medicina, ecologia, economia, finanza.

- Passi: modellazione matematica, analisi del modello, simulazione numerica, confronto sperimentale.

Equazione a derivate parziali è una relazione del tipo:

$$(1) \quad F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

$u = u(x_1, \dots, x_n)$ funz. incognita

ordine dell'eqz : massimo ordine delle derivate che appare in (1)

Equazioni lineari : F lineare rispetto a u e alle sue derivate

Equazioni non lineari :

• semi lineari : F quasi lineare con coeff. delle derivate di ordine max $k-1$ che dipendono solo dalle var. ind.

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(x, u, Du, \dots, D^{k-1} u)$$

• quasi lineari : F è lineare rispetto a derivate di ordine massimo

$$D^{i,j} u(x_1, x_2) = \frac{\partial^i}{\partial x_1^i} \frac{\partial^j}{\partial x_2^j} u = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x_1^i \partial x_2^j} u(x)$$

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{k-1} u) D^\alpha u + a_0(x, u, Du, \dots, D^{k-1} u)$$

• completamente non lineari : F non lineare rispetto a derivate di ordine massimo

Teoria EDP lineari sufficientemente sviluppata e consolidata.

Teoria EDP non lineari sviluppata solo parzialmente in specifici modelli di interesse per scienze applicate.

Esempi di equazioni lineari

1. Equazione di Trasporto (1° ord.) semilineare

$$u_t + \underline{v}(t, \underline{x}) \cdot \nabla_{\underline{x}} u = 0$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, +\infty[$, $u = u(t, \underline{x})$: concentrazione

$\underline{v}$: velocità corrente, $\nabla_{\underline{x}} = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n})$ sostanza,

(trasporto di un inquinante in un canale)

2. Equazione di diffusione del calore (2° ord.)

$$u_t - D \Delta_{\underline{x}} u = 0$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, +\infty[$, $u = u(t, \underline{x}) \in \mathbb{R}$

$\Delta_{\underline{x}} = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2$ operatore di Laplace (laplaciano)

(propagazione del calore attraverso mezzo omogeneo isotropo)
per convoluzione

u : temperatura, D : conduttività termica e calore specifico del materiale

3. Equazione delle onde (2° ord.)

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$$

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n, t \in [0, +\infty[, u = u(t, \underline{x}) \in \mathbb{R}$$

(propagazione di onde trasversali di piccola
ampiezza in: coroli ($n=1$), membrane elastiche ($n=2$),
nel vuoto ($n=3$), onde sonore o elettromagnetiche)
 u : ampiezza oscillazioni, c : velocità propaga.

3 b. Equazione dei Telegrafi.

$$u_{tt} - c^2 \Delta u + \underbrace{k^2 u_t}_{\text{termine di dissipazione}} = 0$$

termine di dissipazione

(trasmissione impulsi elettrici attraverso
un cavo: vibrazioni smorzate)

4. Equazione di Laplace o del potenziale (2° ord.)

$$\Delta u = 0$$

(stato stazionario o di regime in modelli
di diffusione del calore o di propagazione delle onde)

$$\underbrace{\Delta u = f}_{\text{non omogenea}}$$

equazione di Poisson

3 / 5. Equazione di Black-Scholes (2° ora)

$$u_t + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 u_{xx} + r x u_x - r u = 0$$

$x \in [0, +\infty[$: prezzo di un bene, azione, $t \in [0, +\infty[$

$u = u(t, x) \in \mathbb{R}$: prezzo di un prodotto finanziario derivato (opzione europea)

(finanza matematica: evoluzione prezzo di un derivato basato su un bene sottostante)

6. Equazione di Schrödinger (2° ora)

$$-i u_t - \Delta_x u = V(x) u$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, +\infty[$, V : potenziale, $u(t, x) \in \mathbb{C}$

$|u|^2$: densità probabilità (u : funzione d'onda)
della particella di trovarsi in una data configurazione

(meccanica quantistica: evoluzione di una particella soggetta a potenziale V)
atomi, molecole

Esempi di equazioni non lineari

7. Equazione di Burgers (viscosa)
 (quasi lin del 1° ord, senza viscosità)
 (semi lin del 2° ord.)

$$u_t + u u_x = \nu u_{xx}$$

ν : viscosità, $t \in [0, +\infty]$, $x \in \mathbb{R}$, $u = u(t, x)$
 (flusso 1D di particelle di un fluido)

8. Equazione delle superfici minime

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{eqz. quasi lineare 2° ord} \\ x \in \mathbb{R}^2, \frac{u_{xx}}{(1 + (u_x)^2)^{3/2}} = 0 \\ \Rightarrow u_{xx} = 0 \Rightarrow \text{segmento} \\ \text{e curva di min lunghezza} \end{array} \right)$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^2$, $u = u(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

grafico di u minimizza area superficie
 cartesiana $z = z(x, y)$, $\left(\begin{array}{l} z(x, y) = \gamma(x, y) \\ \text{se } (x, y) \in \partial \Omega \end{array} \right)$

(bolle di sapone)

9. Equazione eikonal

$$|\nabla u| = c(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^3, \quad u = u(\underline{x}) \in \mathbb{R}$$

(completamente non lineare del 1° ordine) $c(\underline{x}) \in (0, +\infty)$

(ottica geometrica: $\Gamma_t = \{ \underline{x}; u(\underline{x}) = t \}$ fronte d'onda
 al tempo t .)

(velocità di propagazione
 onda nel mezzo)

4

10. Equazioni di Maxwell (nel vuoto)

$$\begin{cases} \underline{E}_t - \operatorname{rot}_x \underline{B} = 0 & (\text{legge di Ampere}) \\ \underline{B}_t + \operatorname{rot}_x \underline{E} = 0 & (\text{legge di Faraday}) \\ \operatorname{div}_x \underline{E} = \operatorname{div}_x \underline{B} = 0 & (\text{legge di Gauss}) \end{cases}$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{E} = \underline{E}(t, \underline{x})$: campo elettrico

$\underline{B} = \underline{B}(t, \underline{x})$: campo induzione magnetica

11. Equazioni di Navier-Stokes

$$\begin{cases} \underline{u}_t + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \underline{u} \\ \operatorname{div}_x \underline{u} = 0 \end{cases}$$

$\underline{u} = \underline{u}(t, \underline{x}) \in \mathbb{R}^3$: velocità fluido, $\underline{x} \in \mathbb{R}^3, t \in [0, +\infty[$

$p = p(t, \underline{x}) \in \mathbb{R}$: pressione

ρ : densità, ν : viscosità

(moto di un fluido viscoso, omogeneo, comprimibile)

Problemi ben posti

Assegnare condizioni iniziali e/o condizioni al bordo del dominio della soluzione in modo tale che:

- a) $\exists$ almeno una soluzione (esistenza)
- b) $\exists$ sia una sola soluzione (unicità)
- c) la soluzione dipende con continuità dai parametri dell'eqz e dai dati iniziali/al bordo (stabilità).

↳ sensibilità della sol. rispetto a piccole variazioni dei dati produrrebbe sol. approssimate lontane dalle sol. esatte.

Un EDP si dice ben posto se possiede le caratteristiche a), b), c).

5/

Equazione di Diffusione o del Calore

1. Proprietà generali

$$(n=1) \quad u_t - D u_{xx} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(n>1) \quad u_t - D \Delta_x u = f(t, \underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Variazione Temperatura in un mezzo omogeneo isotropo con una sorgente di calore f
- Diffusione: trasporto di materia dovuto al moto molecolare del mezzo in cui è immerso (concentrazione di un soluto o di un inquinante)
- Connessione Tra modelli probabilistici e deterministici: moto Browniano (comportamento caotico di particelle, pollini, nell'acqua dovuto all'urto con le molecole in moto)

$$\boxed{f=0} : \text{eqz omogenea}$$

$$u_t - D \Delta_x u = 0$$

$$D > 0$$

Proprietà:

i) Linearità e principio di sovrapposizione

u, v sol. $a, b \in \mathbb{R} \ (\neq 0) \Rightarrow a u + b v$ sol.

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k u_k(t, \underline{x}) \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(k) u(t, \underline{x}, k) dk$$

sono (formalmente) sol. se $\sum_k, g(k)$

sono sommabili ($u_k(t, \underline{x}), u(t, \underline{x}, k)$ sol.).

ii) Irreversibilità Temporale e simmetrie

$$u(t, \underline{x}) \text{ sol.} \Rightarrow v(t, \underline{x}) \doteq u(-t, \underline{x})$$

$$\text{sol. di } v_t + D \Delta v = 0$$

eq. aggiunta o backwards
del calore

• Invarianza rispetto a riflessione nello spazio

$$v(t, \underline{x}) = u(t, -\underline{x}) \text{ sol. di } v_t - D \Delta v = 0$$

• Invarianza rispetto a traslazioni (nello spazio e tempo)

$$v(t, \underline{x}) = u(t \pm t_0, \underline{x} \pm \underline{x}_0)$$

$$\text{è sol. di } v_t - D \Delta_x v = 0$$

6. Invariante rispetto a dilatazioni paraboliche

$$v(t, \underline{x}) = u(at, b\underline{x}), \quad a, b \in \mathbb{R}^{>0}$$

$$v_t = a u_t = a D \Delta_x u = a D b^{-2} \Delta_x v$$

$$\text{Se } a = b^2 \quad v_t = D \Delta_x v = 0$$

$\Rightarrow v(t, \underline{x}) = u(b^2 t, b\underline{x})$ è sol dello stesso eqz.

Dilatazione parabolica $t \mapsto b^2 t, \underline{x} \mapsto b\underline{x}$
(di rapporto b)

lascia invariante le quantità:

$$\frac{|\underline{x}|^2}{t}$$

$$\frac{\underline{x}}{\sqrt{t}}$$

(le parabole $t = 2|\underline{x}|^2$ sono invarianti per le dilatazioni paraboliche)

2. Derivazione modello di condizione del calore

in un corpo rigido, omogeneo, isotropo.

ρ : densità costante, $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$

$e = e(t, \underline{x})$: energia interna per unità di massa

$\underline{q} = \underline{q}(t, \underline{x})$: flusso di calore per unità di area

$\underline{r} = \underline{r}(t, \underline{x})$: flusso di calore fornito dall'esterno per unità di massa

Bilancio dell'energia in un elemento arbitrario
di volume V del corpo ripido: [tasso di variazione
dell'energia interna in V] = [flusso di calore
attraverso bordo ∂V] + [flusso di calore
dovuto a sorgenti esterne]: $\underline{n}$: normale esterna a V

$$\frac{d}{dt} \int_V e(t, \underline{x}) \rho \, d\underline{x} = - \int_{\partial V} \underline{q} \cdot \underline{n} \, d\sigma + \int_V r(t, \underline{x}) \rho \, d\underline{x}$$

$$\int_V \partial_t e(t, \underline{x}) \rho \, d\underline{x} = - \int_V \operatorname{div}_{\underline{x}} \underline{q} \, d\underline{x}$$

$$\int_V e_t \rho \, d\underline{x} = - \int_V \operatorname{div}_{\underline{x}} \underline{q} \, d\underline{x} + \int_V r \rho \, d\underline{x} \quad \text{per arbitrarietà della regione } V$$

$$e_t \rho = - \operatorname{div} \underline{q} + r \rho \quad \left(\begin{array}{l} \text{legge fondamentale} \\ \text{conservazione calore} \end{array} \right)$$

$$e = e(t, \underline{x}), \quad \underline{q} = \underline{q}(t, \underline{x}) \quad \text{incognite}$$

Leggi costitutive:

• legge di Fourier

$k > 0$ conduttività termica, ϑ : temperatura

$$\underline{q} = -k \nabla \vartheta$$

flusso di calore
proporzionale
a gradiente
di temperatura

calore fluisce verso regioni
con temperatura minore

~~7~~

$$\Rightarrow \operatorname{div} q = -K \Delta \vartheta$$

- energia interna proporzionale alla temperatura

$$e = c_v \vartheta$$

↑
calore specifico del materiale

$$\Rightarrow \left[\vartheta_t - \frac{K}{c_v \rho} \Delta \vartheta = \frac{r}{c_v} \right] \text{ eqz di diffusione}$$

$$D = \frac{K}{c_v \rho} \text{ risposta termica del materiale}$$

$$[D] = (\text{lunghezza})^2 \times (\text{tempo})^{-1}$$

3. Problemi ben posti per equazione del calore ($n=1$)

Sbarra cilindrica di sezione $A \ll \text{lunghezza } L$

Modello 1D: $x \in [0, L]$ $\vartheta = \vartheta(t, x)$, $v = v(t, x)$

$$\vartheta_t - D \vartheta_{xx} = f(t, x) \quad , \quad q = -K \vartheta_x$$

Studiamo evoluzione temperatura in $[0, T]$

i) Assegniamo distribuzione iniziale di temperatura:

Condizioni di Cauchy $\vartheta(0, x) = \vartheta_0(x)$, $x \in [0, L]$
↖ dato iniziale

ii) _D Possiamo usare un termostato per mantenere estremi sbarra a temperatura prefissata:

$$\begin{aligned} \vartheta(t, 0) &= h_0(t) \\ \vartheta(t, L) &= h_L(t) \end{aligned} \quad , t \in]0, T] \quad \begin{array}{l} \text{Condizioni al} \\ \text{bordo di} \\ \text{Dirichlet} \end{array}$$

ii) _N Oppure, possiamo controllare flusso di calore uscente e entrante dagli estremi:

$$\begin{aligned} \text{flusso calore entrante in } x=0 &= -K \vartheta_x(t, 0) \\ \text{" " uscente in } x=L &= K \vartheta_x(t, L) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \vartheta_x(t, 0) &= h_0(t) \\ \vartheta_x(t, L) &= h_L(t) \end{aligned} \quad , t \in]0, T] \quad \begin{array}{l} \text{Condizioni} \\ \text{al bordo di} \\ \text{Neumann} \end{array}$$

Condizioni miste: un estremo condizione di Neumann, nell'altro di Dirichlet

iii) _R Oppure mantenere il flusso di calore a un estremo proporzionale alla differenza fra la temperatura della sbarra e quella dell'ambiente esterno:

$$K \vartheta_x(t, L) = \gamma (\vartheta - \vartheta(t, L)) \quad , t \in]0, T]$$

↑
(temperatura mezzo circostante)

$$\Rightarrow \vartheta_x(t, L) + \alpha \vartheta(t, L) = \beta \quad , t \in]0, T] \quad \begin{array}{l} \text{Condizione al} \\ \text{bordo di} \\ \text{Robin} \end{array}$$

($\alpha, \beta > 0$)

8/ Si studia quindi un problema misto
ai valori iniziali e al bordo:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t - D \mathcal{D}_{xx} = f(t, x), & 0 < x < L, \quad 0 < t < T \\ \mathcal{D}(0, x) = g(x), & 0 \leq x \leq L \\ \text{condizioni agli estremi } x=0, L, & 0 < t \leq T \end{cases}$$

con condiz. agli estremi di:

• Dirichlet

$$\mathcal{D}(t, 0) = h_0(t), \quad \mathcal{D}(t, L) = h_L(t)$$

• Neumann

$$\mathcal{D}_x(t, 0) = h_0(t), \quad \mathcal{D}_x(t, L) = h_L(t)$$

• Robin (o radiazione):

$$\mathcal{D}_x(t, 0) - \alpha \mathcal{D}(t, 0) = h_0(t), \quad \mathcal{D}_x(t, L) + \alpha \mathcal{D}(t, L) = h_L(t) \\ (\alpha > 0)$$

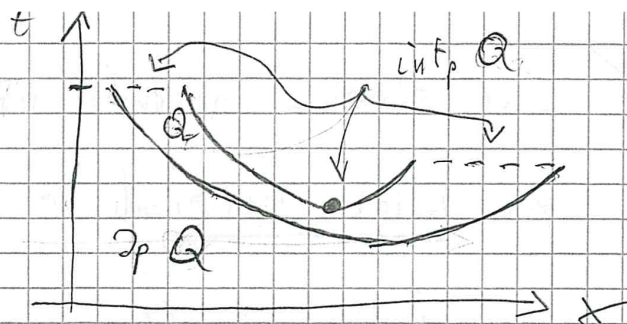
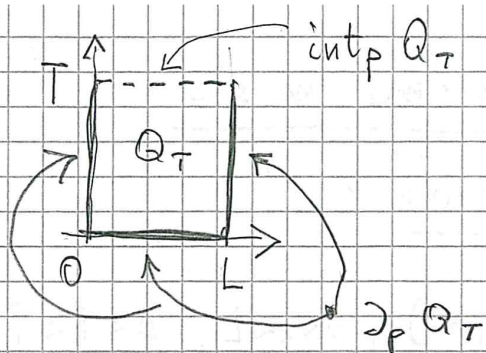
Condizioni omogenee: $h_1 = h_2 = 0$

Frontiera parabolica:

$$Q_T =]0, T[\times]0, L[,$$

$$\text{interno parabolico } \text{int}_P Q_T =]0, T[\times]0, L[$$

$$\begin{aligned} \text{frontiera parabolica } \partial_P Q_T &= \overline{Q_T} \setminus \text{int}_P Q_T = \\ &= \{0\} \times [0, L] \cup]0, T[\times \{0, L\} \end{aligned}$$



$$Q \subseteq]0, +\infty[\times \mathbb{R}$$

Nota: le condizioni (iniziali, o sul bordo) sono sempre assegnate sulla frontiera parabolica.

Non vengono mai assegnate su punti (t, x) , $x \in]0, L[$ che appartengono all'interno parabolico

Def. di interno e frontiera parabolica può essere data per un qualunque aperto, limitato (connesso) $Q \subseteq]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ (v. note Andreatta)

4. Problema misto su domini limitati: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
 $n \geq 1$

$$Q_T =]0, T[\times \Omega, \quad \text{int}_p Q_T =]0, T] \times \Omega$$

$$\partial_p Q_T = \underbrace{\{0\} \times \overline{\Omega}}_{\text{base}} \cup \underbrace{]0, T] \times \partial \Omega}_{\text{parte laterale}}$$

$$(PIB) \begin{cases} u_t - D \Delta u = f(t, x), & (t, x) \in Q_T \\ u(0, x) = g(x) & x \in \overline{\Omega} \\ \text{condizioni al bordo } \partial \Omega, & t \in]0, T] \end{cases}$$

$u = u(t, x)$: funzione incognita

Condizioni al bordo:

• Condizioni di Dirichlet

$$u(t, \underline{x}) = h(t, \underline{x}), \quad \underline{x} \in \partial\Omega, \quad t \in]0, T]$$

• Condizioni di Neumann

$$\begin{aligned} \underline{n} : \text{normale esterna} \Leftrightarrow \quad \underline{q} \cdot \underline{n} &= -k \nabla u \cdot \underline{n} \\ \partial\Omega &= -k \partial_{\underline{n}} u \end{aligned}$$

$$\partial_{\underline{n}} u(t, \underline{x}) = h(t, \underline{x}), \quad \underline{x} \in \partial\Omega, \quad t \in]0, T]$$

• Condizione di Robin o radiazione

$$\partial_{\underline{n}} u(t, \underline{x}) + \alpha u(t, \underline{x}) = h(t, \underline{x}), \quad \underline{x} \in \partial\Omega, \quad t \in]0, T]$$

($\alpha > 0$)

• Condizioni miste

$$\partial\Omega = \overline{\partial_D \Omega} \cup \partial_N \Omega, \quad \partial_D \Omega \cap \partial_N \Omega = \emptyset$$

$$u(t, \underline{x}) = h_D(t, \underline{x}) \quad (t, \underline{x}) \in \overline{\partial_D \Omega} \times]0, T]$$

$$\partial_{\underline{n}} u(t, \underline{x}) = h_N(t, \underline{x}) \quad (t, \underline{x}) \in \partial_N \Omega \times]0, T]$$

5. Problema di Cauchy su domini illimitati
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - D \Delta u = f(t, \underline{x}), \quad t \in]0, T[, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ u(0, \underline{x}) = p(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{condizioni per } |\underline{x}| \rightarrow +\infty, \quad t \in]0, T] \end{array} \right.$$

(modelli in finanza matematica, o nella diffusione del calore in una sbarra o in una piastra di dimensioni molto più grandi rispetto alla regione che si vuole analizzare)

6. Buona posizione del problema misto
su un intervallo limitato ($n=1$) per
equazione omogenea

Barra di lunghezza L , tenuta inizialmente
 a temperatura ϑ_0 , in cui il primo estremo
 viene mantenuto a temperatura ϑ_0 , mentre
 il secondo estremo è tenuto a temperatura ϑ_L

$$(PIB) \quad \begin{cases} \vartheta_t - D \vartheta_{xx} = 0 & x \in]0, L[, t > 0 \\ \vartheta(0, x) = \vartheta_0 & x \in [0, L] \\ \vartheta(t, 0) = \vartheta_0, \vartheta(t, L) = \vartheta_L, & t > 0 \end{cases}$$

Assumiamo : $\vartheta_0 < \vartheta_L$ (flusso di calore
 dall'estremo $x=L$ più caldo, quando flusso
 entrante bilancerà il flusso uscente raggiunge-
 remo una situazione stazionaria).

Vogliamo determinare:

- soluzione stazionaria
- regime transitorio (che tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$)

i) Ri-formulazione del pb in variabili adimensionali

- Riscaldamento dello spazio

$$y = \frac{x}{L}, \quad y \in [0, 1]$$

- Riscaldamento del tempo

$$s = \frac{t}{\tau}, \quad \tau \doteq \frac{L^2}{D} \quad ([D] = (\text{lunghezza})^2 \cdot (\text{tempo})^{-1})$$

- Riscaldamento della temperatura

$$u(s, y) = \frac{\vartheta(\tau s, L y) - \vartheta_0}{\vartheta_L - \vartheta_0}$$

$$u(0, y) = 0, \quad y \in [0, 1]$$

$$u(s, 0) = 0, \quad u(s, 1) = 1, \quad s > 0$$

$$u_s = \frac{\tau}{\vartheta_L - \vartheta_0} \vartheta_t, \quad u_{yy} = \frac{L^2}{\vartheta_L - \vartheta_0} \vartheta_{yy}$$

$$\downarrow$$
$$= \frac{\tau \cdot D}{\vartheta_L - \vartheta_0} \vartheta_{xx} = \frac{L^2}{\vartheta_L - \vartheta_0} \vartheta_{xx}$$

$$\hookrightarrow u_s - u_{yy} = 0 \quad s > 0, y \in]0, 1[$$

11

Problema misto con condizioni al bordo di Dirichlet riscaldato

$$\begin{cases} u_s - u_{yy} = 0 & s > 0, y \in]0, 1[\\ u(0, y) = 0 & y \in [0, 1] \\ u(s, 0) = 0, u(s, 1) = 1, & s > 0 \end{cases}$$

ii) Soluzione stazionaria

$$\begin{cases} u_{yy} = 0 \\ u(0) = 0, u(1) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^{st}(y) = y, y \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vartheta^{st}(x) = \vartheta_0 + (\vartheta_L - \vartheta_0) \frac{x}{L}, x \in [0, L]}$$

Nel regime stazionario c'è un flusso uniforme di calore $-K \vartheta_x = -K \frac{(\vartheta_L - \vartheta_0)}{L}$

iii) Regime transitorio

$$U(s, y) = u^{st}(y) - u(s, y) = y - u(s, y)$$

$$U(0, y) = y, y \in [0, 1]$$

$$U(s, 0) = 0, U(s, 1) = 0, s > 0$$

$$U_s = -u_s, U_{yy} = -u_{yy}$$

$$(PIB) \left\{ \begin{array}{l} U_s - U_{yy} = 0, \quad s > 0, \quad y \in]0,1[\\ U(0,y) = y, \quad y \in [0,1] \\ U(s,0) = U(s,1) = 0, \quad s > 0 \end{array} \right.$$

omogeneo

• Metodo di separazione delle variabili

- pb lineare
- condizioni agli estremi omogenee
- costruiamo la sol. come sovrapposizione di sol. della forma $V(s)W(y)$

Passo 1: cerchiamo sol. della forma

$$U(s,y) = V(s)W(y)$$

$$0 = U(s,0) = V(s)W(0) \quad \forall s \Rightarrow W(0) = 0$$

$$0 = U(s,1) = V(s)W(1) \quad \forall s \Rightarrow W(1) = 0$$

$$0 = U_s - U_{yy} = V'(s)W(y) - V(s)W''(y)$$

$$\Rightarrow \frac{V'(s)}{V(s)} = \frac{W''(y)}{W(y)} \quad \forall s > 0, y \in]0,1[$$

$$\Rightarrow \frac{V'(s)}{V(s)} = \frac{W''(y)}{W(y)} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall s > 0, y \in]0,1[$$

~~12~~

Cerchiamo v, w , sol. di

$$\begin{cases} v' - \lambda v = 0 \\ w'' - \lambda w = 0 \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} v &= v(s), s \geq 0 \\ w &= w(y), y \in [0, 1] \end{aligned}$$

Passo 2 :

a) $\lambda = 0 \Rightarrow w(y) = A + By, w(0) = w(1) = 0 \Rightarrow A = B = 0$

b) $\lambda = \mu^2, \mu > 0 \Rightarrow w(y) = A e^{\mu y} + B e^{-\mu y}$
 $w(0) = w(1) = 0 \Rightarrow A = B = 0$

c) $\lambda = -\mu^2, \mu > 0 \Rightarrow w(y) = A \sin(\mu y) + B \cos(\mu y)$

$$w(0) = 0 \Rightarrow B = 0, w(1) = 0 \Rightarrow \mu = m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ soluzioni non nulle sono

$$w_m(y) = A \sin(m\pi y), A \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$$

$$v_m(s) = C e^{-(m\pi)^2 s}, C \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_m(s, y) = A e^{-(m\pi)^2 s} \sin(m\pi y), A \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}}$$

Passo 3: Nota: $U_m(s, y)$ è sol. dell'eqz.

e soddisfa le condizioni al bordo ma non la condizione iniziale:

$$U_m(0, y) = A \sin(m\pi y)$$

Idea: cerchiamo $\{A_m\}_m$ in modo da ottenere

la condizione iniziale $q(y) = y$ come
sovrapposizione di infinite $U_m(0, y)$.

$$\Rightarrow U(s, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-(m\pi)^2 s} \sin(m\pi y), \quad (1)$$

Problemi:

P1. Determinare $\{A_m\}_m$ t.c.

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\pi y) = y \quad y \in [0, 1]$$

Mostrare in che senso $U(s, \cdot) \rightarrow Id_{[0,1]}$

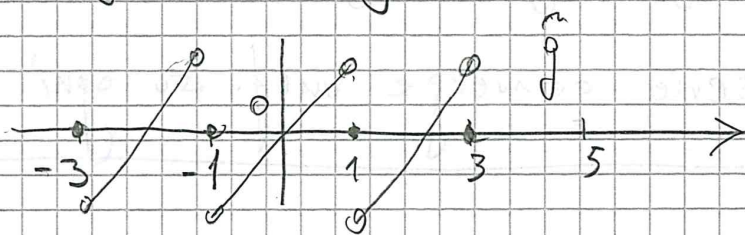
P2. Mostrare che U continua sol essere sol. dell'eqz. e a soddisfare condiz. agli estremi come ogni U_m

13

P3. Mostrare che U fornisce l'unica sol.
del problema (PIB) omogeneo (p. 11 b)

[P1]: Sviluppiamo $g(y) = y$ in serie dispari di
Fourier su $]0, 1[\rightarrow$ consideriamo
estensione dispari di g periodica di periodo 2:

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in]-1, 1[\\ 0 & \text{se } y = -1, 1 \end{cases}$$



Coeff. di Fourier:

$$\begin{aligned} A_m &= \int_{-1}^1 y \sin(m\pi y) dy = 2 \int_0^1 y \sin(m\pi y) dy \\ &= -\frac{2}{m\pi} \left(y \cos(m\pi y) \right) \Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{2}{m\pi} \int_0^1 \cos(m\pi y) dy \\ &= -\frac{2}{m\pi} \cos m\pi = (-1)^{m+1} \frac{2}{m\pi} \end{aligned}$$

$$(2) \quad y = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2}{m\pi} \operatorname{sen}(m\pi y)$$

Poiché f è continua in $] -1, 1[$ la sua serie di Fourier converge in $] -1, 1[$, uniformemente in ogni $[a, b] \subseteq] -1, 1[$. La serie in (2) converge a y anche in $y=0$, ma non in $y=1$.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} U(0, y) &= y \quad \forall y \in [0, 1[\\ &\text{e la serie converge unif. su ogni } [a, b] \subseteq [0, 1[\end{aligned}}$$

• Mostriamo che $U(s, \cdot) \rightarrow Id_{[0,1]}$ in $L^2(0,1)$ per $s \rightarrow 0$

$$2 \int_0^1 (U(s, y) - y)^2 dy = \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e^{-(m\pi)^2 s} - 1)^2}{m^2} \quad (3)$$

(uguaglianza di Parseval)

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^T f^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_m (a_m^2 + b_m^2), \quad a_m = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{T}\right) dx, \quad b_m = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{T}\right) dx$$

$$\frac{(e^{-(m\pi)^2 s} - 1)^2}{m^2} \leq \frac{1}{m^2} \quad \forall s \geq 0, \quad \sum_m \frac{1}{m^2} \text{ convergente}$$

$\Rightarrow$ serie in (3) è uniformem. convergente su $[0, +\infty[$ per criterio di Weierstrass.

14 $\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e^{-(m\pi)^2 s} - 1)^2}{m^2} = 0$

(passaggio al limite per serie unif. convergenti)

• Mostriamo che $V(s, \cdot) \rightarrow Id_{[0,1]}$ uniformemente su $[a, b] \subseteq [0, 1]$, per $s \rightarrow 0$.

Più precisamente, mostriamo che

(4) $\lim_{s \rightarrow 0} V(s, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2}{m\pi} \sin(m\pi y)$ uniformem.
su $[a, b] \subseteq]-1, 1[$

Consideriamo:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2}{m\pi} \sin(m\pi y) - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2}{m\pi} e^{-(m\pi)^2 s} \sin(m\pi y) \right| \leq \\ & \leq \left| \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} (1 - e^{-(m\pi)^2 s}) \frac{2}{m\pi} \sin(m\pi y) \right| + \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2}{m\pi} \sin(m\pi y) \right| \\ & \leq \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^n \frac{(1 - e^{-(m\pi)^2 s})}{m} + \frac{2}{\pi} \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-(m\pi)^2 s})}{m} \sin(m\pi(y+1)) \right| \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{A_n} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{B_n} \quad (-1)^m \sin(m\pi y) = \sin(m\pi(y+1)) \end{aligned}$$

Mostriamo che, fissato $\delta > 0$, la somma in B converge a 0 per $n \rightarrow \infty$ uniform su $[-1+\delta, 1-\delta]$.

Poniamo $Q_m(y) = \sin(m\pi(y+1))$, $b_m(s) = \frac{1 - e^{-(m\pi)^2 s}}{m}$

e osserviamo (formula sommatoria di Abel, analogo dell'integrazione per parti):

$$\sum_{m=n+1}^{n+p} Q_m(y) b_m(s) = \left(\sum_{m=n+1}^{n+p} Q_m(y) \right) b_{n+p}(s) - \sum_{m=n+1}^{n+p-1} (b_{m+1}(s) - b_m(s)) \left(\sum_{k=n+1}^m Q_k(y) \right)$$

$\Rightarrow$

$$\left| \sum_{m=n+1}^{n+p} Q_m(y) b_m(s) \right| \leq \left| \sum_{m=n+1}^{n+p} Q_m(y) \right| |b_{n+p}(s)| +$$

$$+ \sum_{m=n+1}^{n+p-1} |b_{m+1}(s) - b_m(s)| \left| \sum_{k=n+1}^m Q_k(y) \right| \leq \quad (*)$$

$$\leq \left[\sum_{m=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sin(\pi \frac{\delta}{2})} \left| \frac{1}{n+p} \right| + \sum_{m=n+1}^{n+p-1} |b_{m+1}(s) - b_m(s)| \right]$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} Q_m(y) b_m(s) \right| \leq \frac{1}{\sin(\pi \frac{\delta}{2})} \sum_{m=n+1}^{\infty} |b_{m+1}(s) - b_m(s)|$$

$(p \rightarrow \infty)$

15

$$\leq \frac{1}{\sin\left(\pi \frac{d}{2}\right)} \left[\sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{(m\pi)^2 s}{2}}}{m} - \frac{e^{-\frac{(m+1)\pi)^2 s}{2}}}{m+1} \right) \right]$$

$$\leq \frac{2}{(n+1) \sin\left(\pi \frac{d}{2}\right)} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

Nota: $B_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ unif su $[-1+d, 1-d]$

$$A_n \rightarrow 0 \text{ per } s \rightarrow 0$$

e si deduce quindi (4).

Rimane da mostrare la disuguaglianza in $(*)$

$$\left| \sum_{m=n}^{n+p} \sin(m\pi(y+1)) \right| \leq \frac{1}{\sin(\pi d/2)} \quad \forall y \in [-1+d, 1-d] \\ \forall n, p \in \mathbb{N}$$

È facile:

$$\left| \sum_{m=n}^{n+p} \sin(m\pi(y+1)) \right| = \left| \operatorname{Im} \left(\sum_{m=n}^{n+p} e^{im\pi(y+1)} \right) \right| \\ \leq \left| \sum_{m=n}^{n+p} e^{im\pi(y+1)} \right| \leq \left| \frac{1 - e^{i(p(y+1)+1)\pi}}{1 - e^{i(y+1)\pi}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i(y+1)\pi}|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2 \sin((y+1)\frac{\pi}{2})} \leq \frac{1}{2 \sin(\pi \frac{1}{2})}$$

$$\left(\begin{aligned} -1+j \leq y \leq 1+j &\Leftrightarrow \pi j \leq (y+1)\pi \leq (2-j)\pi \\ &\Leftrightarrow \pi \frac{1}{2} \leq (y+1)\frac{\pi}{2} \leq (1-\frac{j}{2})\pi \end{aligned} \right)$$

Questo conclude la olim. di (4) e quindi di P1

[P2.] Consideriamo

$$U(s, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \underbrace{\frac{2}{m\pi} e^{- (m\pi)^2 s}}_{U_m(s, y)} \sin(m\pi y) \quad (5)$$

e osserviamo che, per ogni $s > 0$, la serie è uniformemente convergente su $[0, 1]$ per il criterio di Weierstrass in quanto la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{- (m\pi)^2 s}}{m}$

$$\text{è convergente} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} U(s, y) = \lim_{y \rightarrow 1} U(s, y) = 0, \quad s > 0$$

(passaggio al lim per serie unif. convergenti) $\Rightarrow U$ soddisfa le condizioni omogenee di

Dirichlet agli estremi.

16 / Analizziamo adesso la derivabilità di $U(s, y)$

$$\partial_s U_m = (-1)^m 2m\pi e^{-(m\pi)^2 s} \sin(m\pi y)$$

$$\partial_y^2 U_m = (-1)^m 2m\pi e^{-(m\pi)^2 s}$$

$$\Rightarrow |\partial_s U_m| \leq 2m\pi e^{-(m\pi)^2 s_0} \quad |\partial_y^2 U_m| \leq 2m\pi e^{-(m\pi)^2 s_0} \quad \forall s \geq s_0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m e^{-(m\pi)^2 s_0} \text{ convergente } \forall s_0 > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \partial_s U_m, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \partial_y^2 U_m \text{ convergono a}$$

$$\partial_s U, \quad \partial_y^2 U \text{ uniformemente su } [s_0, +\infty[\times [0, 1]$$

$$\Rightarrow U \text{ è sol. dell'eqz } U_s - U_{yy} = 0.$$

Nota: dall'analisi di sopra segue che U definita in (5) è una funzione continua su

$]0, +\infty[\times [0, 1] \cup \{0\} \times [0, 1[$ e derivabile infinite

volte con continuità su $]0, +\infty[\times [0, 1]$.

Ritorno alle variabili originali

Soluzione di (PIB) non omogeneo (p. 10)

$$(6) \vartheta(t, x) = \vartheta^{st}(x) - (\vartheta_L - \vartheta_0) U\left(\frac{D}{L^2}t, \frac{x}{L}\right)$$

$$= \vartheta_0 + (\vartheta_L - \vartheta_0) \frac{x}{L} - (\vartheta_L - \vartheta_0) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} e^{-\frac{(n\pi)^2 D t}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(tempo di decadimento verso sol. stazionaria è dell'ordine di L^2/D)

P3 Unicità della soluzione (PIB) omogeneo

Metodo dell'energia (eqz lineare, condiz. omogenee)

Metodo che può essere utilizzato in contesti più generali (anche per equazioni non lineari), che non richiede la conoscenza di un'espressione esplicita di una soluzione.

Assumiamo $U \in (C([0, +\infty[, L^2(0, 1)) \cap C_{t,x}^{1,2}([0, +\infty[\times [0, 1])$

$$\left(C_{t,x}^{1,2}(Q) = \{u: Q \rightarrow \mathbb{R}; u, u_t, u_x, u_{xx} \in C(Q)\} \right)$$
$$Q \subseteq]0, +\infty[\times \mathbb{R}$$

$$\text{soluzione di } \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, x \in]0, 1[\\ (7) \quad u(0, x) = g(x), & x \in [0, 1] \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$(g \in L^2(0, 1))$$

17/ Consideriamo

$$E(t) = \int_0^1 u^2(t, x) dx \quad t \geq 0$$

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_0^1 \partial_t (u^2(t, x)) dx = 2 \int_0^1 u(t, x) u_t(t, x) dx =$$

(continuità di u^2 , $\partial_t u^2 \Rightarrow$ scambio dell'ordine di derivazione e integrazione)

$$= 2 \int_0^1 u(t, x) u_{xx}(t, x) dx = 2 \left[u(t, x) u_x(t, x) \right]_{x=0}^{x=1} - 2 \int_0^1 u_x^2(t, x) dx$$

$$= -2 \int_0^1 u_x^2(t, x) dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} E'(t) \leq 0 \quad \forall t > 0 \\ E \text{ continua su } [0, +\infty[\end{array} \right\} \Rightarrow E(t) \leq E(0) \quad \forall t \geq 0$$

Teorema 1: $U \in C([0, +\infty[, L^2(0, 1)) \cap C_{t,x}^{1,2}([0, +\infty[\times [0, 1])$

$$\text{sol. di (6)} \Rightarrow \int_0^1 u^2(t, x) dx \leq \int_0^1 g^2(x) dx \quad (8)$$

stima di stabilità

$\Rightarrow$ piccole perturbazioni del dato iniziale g determinano piccole variazioni della sol. U .

Siano $U_1(t, x)$, $U_2(t, x)$ sol. di (7) con dato iniziale $g_1(x)$, $g_2(x)$, rispettivamente

Poniamo $w = U_1 - U_2$. Allora si ha

$$(7) \quad \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 & t > 0, x \in]0, 1[\\ w(0, x) = g_1(x) - g_2(x) & x \in [0, 1] \\ w(t, 0) = w(t, 1) = 0 \end{cases}$$

Utilizzando stima di stabilità (8) otteniamo

$$\int_0^1 (U_1 - U_2)^2(t, x) dx \leq \int_0^1 (g_1 - g_2)^2(x) dx$$

Corollario 1: il problema misto (7) ammette al

più una soluzione $U \in \mathcal{C}([0, +\infty[, L^2(0, 1)) \cap \mathcal{C}_{t,x}^{1,2}([0, +\infty[\times]0, 1[)$
(unicità puntuale su $]0, +\infty[\times [0, 1]$)

$\Rightarrow \Theta(t, x)$ definita in (6) p. 166 fornisce

l'unica sol. di (PIB) p. 10 t.c.

$$U \in \mathcal{C}([0, +\infty[, L^2(0, 1)) \cap \mathcal{C}_{t,x}^{1,2}([0, +\infty[\times [0, 1])$$

Nota: metodo dell'energia può essere utilizzato anche per eqvz non lineari per derivare una stima

come in (8):

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u^3, & t > 0, x \in]0, 1[\\ u(0, x) = g(x), & x \in [0, 1] \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

18/ $\Rightarrow E(t) = \int_0^1 u^2(t, x) dx$ so ololiz f.

$$\int_0^1 u^2(t, x) dx \leq \int_0^1 f^2(x) dx$$

Tuttavia non possiamo utilizzare direttamente
 qs stima per dedurre una stima di stabilità
 tra due sol. con dato iniziale differente,
 né per dedurre l'unicità, per la non linearità
 dell'equazione.

7. Principi di massimo e unicità in dim $n > 1$

flusso calore verso regioni con temperatura minore



sol. eqz. omogenee del calore assume massimi e minimi globali sulla frontiera parabolica: tali valori o sono assunti inizialmente al tempo $t=0$ oppure sono assunti sulla frontiera del dominio.

Teorema 2 (Principio di massimo debole)

Sia $u \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
t.c. aperto limitato

$$(9)_{\leq} \quad u_t - D\Delta u \leq 0 \quad \text{in } Q_T$$

Allora il massimo di u è assunto su $\partial_p Q_T$:

$$\max_{\bar{Q}_T} u = \max_{\partial_p Q_T} u$$

Se si ha:

$$(9)_{\geq} \quad u_t - D\Delta u \geq 0 \quad \text{in } Q_T$$

allora

$$\min_{\bar{Q}_T} u = \min_{\partial_p Q_T} u$$

In particolare, se vale $(9)_{\leq}$ e $u \leq 0$ su $\partial_p Q_T$, allora $u \leq 0$ su $\bar{Q}_T$ ($(9)_{\geq}$, $u \geq 0$ su $\partial_p Q_T \Rightarrow u \geq 0$ su $\bar{Q}_T$)

19 / Dim Teo 2.

Passo 1 : supponiamo u soddisfi:

$$(g)_< \quad u_t - D \Delta u < 0 \quad \text{in } Q_T$$

$$\text{e } \exists (t_0, \underline{x}_0) \in \text{int}_p Q_T =]0, T] \times \Omega \quad \text{t.c.}$$

$$u(t_0, \underline{x}_0) = \max_{\overline{Q_T}} u \quad \left(\begin{array}{l} \text{\textit{è suff. supporre } } (t_0, \underline{x}_0) \\ \text{\textit{punto di max locale}} \end{array} \right)$$

$$\text{Allora si avrebbe } \partial_{x_i}^2 u(t_0, \underline{x}_0) \leq 0 \quad \forall i$$

$$\partial_t u(t_0, \underline{x}_0) \geq 0$$

$$\Rightarrow [u_t - D \Delta u](t_0, \underline{x}_0) \geq 0 \rightarrow \leftarrow$$

$$\Rightarrow \max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\partial_p Q_T} u$$

(per continuità
di u su $\overline{Q_T}$)

Passo 2 : supponiamo u soddisfi $(g)_<$ e consideriamo

$$w^\varepsilon(t, \underline{x}) = u(t, \underline{x}) - \varepsilon t, \quad \varepsilon > 0$$

Si ha

$$w_t^\varepsilon - D \Delta w = u_t - D \Delta u - \varepsilon < 0 \quad \text{in } Q_T$$

$$\Rightarrow \max_{\overline{Q_T}} w^\varepsilon = \max_{\partial_p Q_T} w^\varepsilon$$

D'altra parte, osserviamo che

$$w^\varepsilon(t, \underline{x}) \leq u(t, \underline{x}) \leq w^\varepsilon(t, \underline{x}) + \varepsilon T$$

$$\forall t \in [0, T], x \in \overline{\Omega}$$

$$\Rightarrow \max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\overline{Q_T}} w^\varepsilon + \varepsilon T = \max_{\partial_P Q_T} w^\varepsilon + \varepsilon T$$

$$u \leq w^\varepsilon + \varepsilon T$$

$$\leq \max_{\partial_P Q_T} u + \varepsilon T$$

$$w^\varepsilon \leq u$$

$$\Rightarrow \max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\partial_P Q_T} u + \varepsilon T \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\partial_P Q_T} u \quad \square$$

Def: una funzione u che soddisfa $(\mathcal{I})_\leq$ si chiama sottosoluz. dell'eqz. del calore
(se soddisfa $(\mathcal{I})_\geq$ si chiama sopra soluzione)

Corollario 2 $u \in C^{1,2}_{t,x}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ sol. di

$$(10) \quad u_t - D\Delta u = 0$$

$$\Rightarrow \max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\partial_P Q_T} u, \quad \min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\partial_P Q_T} u$$

20

$$\min_{\partial_p Q_T} u \leq u(t, \underline{x}) \leq \max_{\partial_p Q_T} u \quad \forall (t, \underline{x}) \in \overline{Q_T}$$

Corollario 3 (confronto, unicità, stabilità)

Siano $u, v \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ sol di

$$u_t - D\Delta u = f(t, x), \quad v_t - D\Delta v = g(t, x)$$

f, g limitate su Q_T .

Allora si ha:

$$i) \quad u \geq v \text{ su } \partial_p Q_T \text{ e } f \geq g \text{ su } Q_T \\ \Downarrow \\ u \geq v \text{ su } Q_T$$

$$ii) \quad \max_{\overline{Q_T}} |u - v| \leq \max_{\partial_p Q_T} |u - v| + T \sup_{Q_T} |f - g|$$

(stimma di stabilità)

[per eqz calore non omogenea]

In particolare, se $f = g$ e $u = v$ su $\partial_p Q_T$

segue che $u = v$ su $Q_T \Rightarrow$ (PIB) con condizioni di Dirichlet ha al più una sol. in $C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$

Dim: i) $v - u$ sottosoluzione eqz calore

$$v - u \leq 0 \text{ su } \partial_p Q_T \Rightarrow v - u \leq 0 \text{ su } Q_T$$

ii) Consideriamo $w^+ = v - u - Mt$, $M = \sup_{\overline{Q_T}} |f - g|$

Si ha:

$$w^+(t, x) \leq (v - u)(t, x) \leq w^+(t, x) + MT \quad \forall t \in [0, T], x \in \overline{\Omega}$$

$$\Rightarrow \max_{\overline{Q_T}} w_t^+ - D \Delta w^+ = (v_t - D \Delta v) - (u_t - D \Delta u) - M = f - g - M \leq 0$$

$$\Rightarrow \max_{\overline{Q_T}} v - u \leq \max_{\overline{Q_T}} w^+ + MT = \max_{\partial_p Q_T} w^+ + MT \leq \max_{\partial_p Q_T} w^+ + MT \leq v - u + MT$$

$\swarrow$ $\searrow$
 $v - u \leq w^+ + MT$ $w^+ \leq v - u$

$$\leq \max_{\partial_p Q_T} (v - u) + MT \leq \max_{\partial_p Q_T} |v - u| + MT$$

Analogamente, posto $w^- = u - v - Mt$, si ha

$$w^- \leq u - v \leq w^- + MT, \quad w_t^- - D \Delta w^- \leq 0$$

$$\Rightarrow \max_{\overline{Q_T}} u - v \leq \max_{\overline{Q_T}} w^- + MT = \max_{\partial_p Q_T} w^- + MT \leq$$

$$\leq \max_{\partial_p Q_T} |u - v| + MT. \quad \square$$

Nota: PM debole non esclude possibilità

che $\max$ o $\min$ della soluzione eqz. omogenea del calore possano essere assunti anche in un punto dell'interno parabolico.

Se ciò avviene per (t_0, x_0) , $t_0 > 0$, $x_0 \in \Omega$,
e Ω è connesso, allora la sol. dovrà essere
costante su tutta la regione $[0, t_0] \times \overline{\Omega}$.

Teorema 3 (Principio di massimo forte)
[N.A. Watson, 1973; W. Fulk, 1966]

Sia $u \in C_{t,x}^{1,2}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$, $\Omega_T =]0, T[\times \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
sottosol. dell'eqz. omogenea del calore (10) limitato
su Ω_T . Se $\exists x_0 \in \Omega$, $0 < t_0 \leq T$ t.c. limitato e connesso

$$u(t_0, x_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u = M$$

Allora $u(t, x) = M \quad \forall (t, x) \in [0, t_0] \times \overline{\Omega}$.

La stessa conclusione si ottiene se u è sottosol. dell'eqz. omogenea del calore su Ω_T che assume il minimo in un punto di $\text{int}_P \Omega_T$.

Corollario 4 : $u \in C_{t,x}^{1,2}(\bar{Q}_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ sol.

oli $u_t - D \Delta u = 0$.

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso e $\exists x_0 \in \Omega, 0 < t_0 \leq T$ t.c.

$$u(t_0, x_0) = \min_{\bar{Q}_T} u \quad \text{e} \quad u(t_0, x_0) = \max_{\bar{Q}_T} u,$$

allora u è costante su $[0, t_0] \times \bar{\Omega}$ (e coincide con il valore m_i)

Nota: Se u soddisfa l'equazione del calore con condizioni al bordo di Dirichlet nulle e un dato iniziale non negativo e positivo in qualche punto di Ω , allora deve essere che $u(t, x) > 0 \forall x \in \Omega, \forall t > 0$. Infatti, per il PM debole si ha:

$$0 = \min_{\partial_p \Omega_T} u \leq u(t, x) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \bar{\Omega}.$$

D'altra parte, se esiste $t_0 > 0, x_0 \in \Omega$ t.c.

$$u(t_0, x_0) = 0$$

Si vede che, nelle condiz. di sopra, il max può essere assunto solo a $t = 0$

per il PM forte, dovrebbe essere $u(t, x) = 0$

$\forall (t, x) \in [0, t_0] \times \bar{\Omega}$. Questa proprietà ci

dice che valori positivi del dato iniziale sono immediatamente propagati su tutto il dominio Ω dalla sol. dell'eqz. del calore ad ogni istante successivo: in finita velocità di propagazione. Per lo stesso motivo

22 / 8. Proprietà del valor medio

La dim del PM forte si basa su una proprietà di valore medio dell'eqz. del calore, legata agli insiemi di livello della funzione

$$(1) \quad \Gamma_D(t, x) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

che risulterà essere una sol. privilegiata dell'eqz. del calore (nucleo del calore)

Consideriamo, per un fissato $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 > 0$, la regione

$$(2) \quad E_D(t_0, x_0, r_0) \doteq \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; t \leq t_0, \Gamma_D(t_0 - t, x_0 - x) \geq \frac{1}{r_0^n} \right\}$$

che si chiama palla del calore.

• Si noti che, ponendo $\Psi_{D, r_0}(s, y) = -\frac{n}{2} \ln(4\pi Ds) - \frac{|y|^2}{4Ds} + n \ln r_0$

$$\Gamma_D(t_0 - t, x_0 - x) \geq \frac{1}{r_0^n} \iff \Psi_{D, r_0}(t_0 - t, x_0 - x) \geq 0$$

$$(3) \implies \Psi_{D, r_0}(t_0 - t, x_0 - x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \partial E_D(t_0, x_0, r_0)$$

$$\text{Inoltre } \left. \begin{aligned} \Gamma_D(t_0 - t, x_0 - x) &\geq \frac{1}{r_0^n} \\ e^{-\frac{|x_0 - x|^2}{4D(t_0 - t)}} &\leq 1 \end{aligned} \right\} \implies \frac{1}{\sqrt{4D(t_0 - t)}} \geq \frac{1}{r_0}$$

$$\Rightarrow t_0 - t \leq \frac{r_0^2}{4\pi D}$$

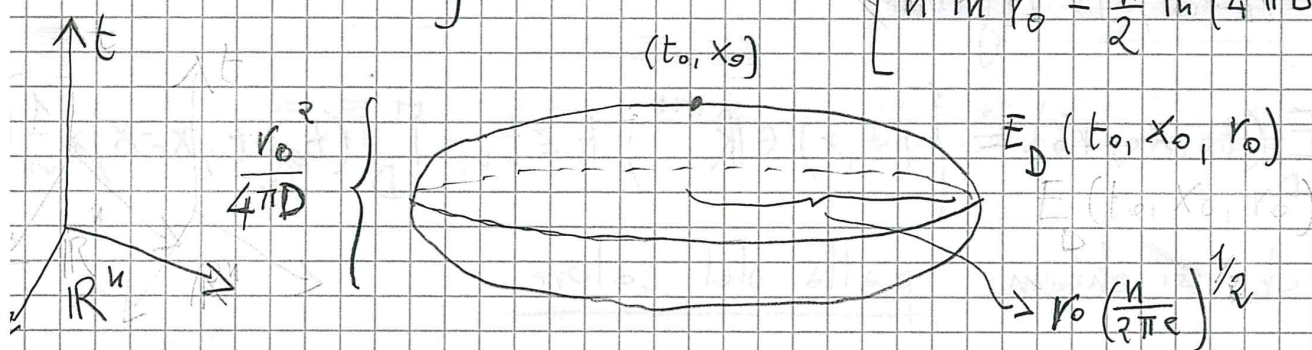
$\Rightarrow$ palla del calore può essere equivalentemente espressa come:

$$(4) E_D(t_0, x_0, r_0) = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; t_0 - \frac{r_0^2}{4\pi D} \leq t \leq t_0, \Psi_{D, r_0}(t_0 - t, x_0 - x) \geq 0 \right\}$$

D'altra parte è anche utile osservare che:

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_{D, r_0}(s, y) \geq 0 \\ 0 \leq s \leq \frac{r_0^2}{4\pi D} \end{array} \right\} \Leftrightarrow |y| \leq \sqrt{4Ds \ln \left(\left(\frac{r_0}{\sqrt{4\pi Ds}} \right)^n \right)}$$

$$\left[n \ln r_0 - \frac{n}{2} \ln(4\pi Ds) \right]$$



Il punto (t_0, x_0) si trova al centro della sommità della palla, ma non appartiene alla palla in quanto il nucleo del calore $P_D(t, x)$ non è definito in $(0, 0)$.

- Ψ_{D, r_0} gode di proprietà di invarianza simili a quelle della sol. del calore (dilatrazioni paraboliche, cfr. p. 6)

23

$$\begin{aligned}\psi_{D, \lambda r_0}(\lambda^2 s, \lambda y) &= \ln \left(\frac{\lambda r_0}{\sqrt{4\pi D \lambda^2 s}} \right)^n - \frac{|\lambda y|^2}{4D \lambda^2 s} = \\ &= \psi_{D, r_0}(s, y) \quad \forall \lambda > 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ possiamo esprimere la palla del calore con traslazioni e riscalamenti parabolici come:

$$\begin{aligned}(5) E_D(t_0, x_0, r_0) &= (t_0, x_0) + E_D(0, 0, r_0) = \\ &= (t_0, x_0) + \left\{ (r_0^2 s, r_0 y) ; (s, y) \in E_D(0, 0, 1) \right\}\end{aligned}$$

$$\left(\psi_{D, 1}(s, y) \geq 0 \Leftrightarrow \psi_{D, r_0}(r_0^2 s, r_0 y) \geq 0 \right)$$

$$\left[\text{Se } u \text{ sopp. sol. allora } u(t_0, x_0) \geq \frac{1}{4Dr_0^n} \iint_{E_D(t_0, x_0, r_0)} u(x) dt \right]$$

Teorema (Proprietà del valor medio, eqz. del calore)

Sia $u \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T)$ sott. sol. dell'eqz. del calore omogenea (10). Allora, per ogni (t_0, x_0) , $r_0 > 0$ t.c.

$E_D(t_0, x_0, r_0) \subseteq Q_T$, si ha

$$(6) u(t_0, x_0) \leq \frac{1}{4Dr_0^n} \iint_{E_D(t_0, x_0, r_0)} u(t, x) \frac{|x - x_0|^2}{(t - t_0)^2} dx dt$$

(Inoltre vale (10) p. 26)

Si noti che, per def della palla del calore, la rappresentazione integrale (6) dipende solo da valori della sol. $u(t, x)$ in tempi $t < t_0$, come ci aspettiamo dal fatto che tale sol. non è influenzata da tempi futuri.

Dim: Passo 1: a meno di traslazioni possiamo

supporre $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, poniamo $E_D(r_0) \equiv E_D(0, 0, r_0)$.

Consideriamo

$$(7) \quad \phi(r) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{r^n} \iint_{E_D(r)} u(t, x) \frac{|x|^2}{(Dt)^2} dx dt = \quad (r > 0)$$

$$\left(\begin{array}{l} t = r^2 s \\ x = ry \\ dx dt = r^{n+2} dy ds \end{array} \right) = \iint_{E_D(1)} u(r^2 s, ry) \frac{|y|^2}{(Ds)^2} dy ds$$

e mostriamo che :

$$i) \quad \phi'(r) \geq 0 \quad \forall r > 0$$

$$ii) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = u(0, 0) \iint_{E_D(1)} \frac{|y|^2}{(Ds)^2} dy ds = \frac{4}{D} u(0, 0)$$

$$\Rightarrow u(0, 0) \leq \frac{D}{4} \phi(r) = \frac{1}{4Dr^n} \iint_{E_D(r)} u(t, x) \frac{|x|^2}{t^2} dx dt$$

(Si noti che $4D = \iint_{E_D(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds$ è il volume pesato con peso $\frac{|y|^2}{s^2}$ della palla del calore "unitaria" ed è indipendente dalla dimensione n.)

24

$$\phi'(r) = \iint_{\substack{E(1) \\ D}} \left[2r u_s \frac{|y|^2}{D^2 s} + \sum_{i=1}^n u_{y_i} \cdot y_i \frac{|y|^2}{(Ds)^2} \right] dy ds$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{\substack{E(r) \\ D}} \left[2 u_t \frac{|x|^2}{D^2 t} + \sum_{i=1}^n u_{x_i} x_i \frac{|x|^2}{(Dt)^2} \right] dx dt =$$

$s = t/r^2$
 $y = x/r$
 $dy ds = \frac{1}{r^{n+2}} dx dt$

$\doteq A + B$

Passo 2 : riscriviamo B utilizzando il fatto

che

$$\psi(t, x) \doteq \psi_{D, r_0}(-t, -x) = -\frac{n}{2} \ln(4\pi D(-t)) + \frac{|x|^2}{4Dt} + n \ln r_0$$

→ obblisf: $\psi(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \partial E(r_0)$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{\substack{E(r) \\ D}} 4 u_t \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{D} \psi_{x_i} dx dt =$$

(integr. a parti rispetto a x e $\psi = 0$ su $\partial E(r)$)

$$= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{\substack{E(r) \\ D}} \left[4 \sum_{i=1}^n u_t x_i \cdot \frac{x_i}{D} \psi + \frac{4n u_t \psi}{D} \right] dx dt =$$

int per parti rispetto a t

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{\substack{E(r) \\ D}} \left[4 \sum_{i=1}^n u_{x_i} \cdot \frac{x_i}{D} \underbrace{\left(-\frac{n}{2t} - \frac{|x|^2}{4Dt^2} \right)}_{\psi_t} - \frac{4n u_t \psi}{D} \right] dx dt =$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E_D(r)} \left[-\frac{2n}{t} \sum_{i=1}^n u_{x_i} \frac{x_i}{D} - \frac{4n u_t}{D} \psi \right] dx dt - B$$

$$\Rightarrow \phi'(r) = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E_D(r)} \left[-\frac{2n}{Dt} \sum_{i=1}^n u_{x_i} x_i - \frac{4n u_t}{D} \psi \right] dx dt$$

$$\geq \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E_D(r)} \left[-\frac{2n}{Dt} \sum_{i=1}^n u_{x_i} x_i - 4n \Delta u \psi \right] dx dt =$$

$u_t \leq D \Delta u$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E_D(r)} \left[-\frac{2n}{Dt} \sum_{i=1}^n u_{x_i} x_i + 4n \sum_{i=1}^n u_{x_i} \psi_{x_i} \right] dx dt$$

int per parti rispetto a x_i

$\psi_{x_i} = \frac{x_i}{2Dt}$

$$\Rightarrow \phi'(r) \geq 0 \quad \forall r > 0.$$

Passo 3 : Mostriamo che :

$$(8) \quad \iint_{E_D(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = D \iint_{E_1(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = 4D$$

$E_D(r)$ $E_1(r)$ $(s=Dt)$

Ricordiamo che

$$E_D(1) = \left\{ (t, x) ; -\frac{1}{4\pi D} \leq t \leq 0, |x| \leq \sqrt{(-2nDt) \cdot \ln\left(\frac{1}{-4\pi Dt}\right)} \right\}$$

25

$$\Rightarrow \int_D \frac{|y|^2}{s^2} dy dt = \int_0^{\frac{1}{4\pi D}} \frac{1}{s^2} \left[\int_{|y|^2 \leq 2nDs \ln\left(\frac{1}{4\pi Ds}\right)} |y|^2 dy \right] ds$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4\pi D}} \frac{1}{s^2} \sigma(s^{n-1}) \left[\int_{r \leq \left(2nDs \ln\left(\frac{1}{4\pi Ds}\right)\right)^{1/2}} r^{n+1} dr \right] ds =$$

combinamento
in coord. polari

$$\sigma(s^{n-1}) = n m(B^n) \\ = \frac{n \pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{n \pi^{n/2} (2n)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} D^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \cdot (n+2)}$$

s^{n-1} : sfera unitaria
 B^n : palla unitaria

$$\int_0^{\frac{1}{4\pi D}} s^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left(\ln\left(\frac{1}{4\pi Ds}\right) \right)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} ds =$$

$t = 4\pi Ds$
 $dt = 4\pi D ds$

$$= \frac{n \pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{(2n)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} D^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{(n+2) (4\pi D)^{\frac{n}{2}}} \int_0^1 t^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} dt =$$

$$= \frac{n \pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{(2n)^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot D}{(n+2) (4\pi)^{n/2}} \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)} =$$

$\left(\frac{n}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)$

(9)

$$= \frac{2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot n^{\left(\frac{n}{2}+2\right)} \cdot D}{2^n (n+2) \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot \frac{2^{\left(\frac{n}{2}+2\right)}}{n^{\left(\frac{n}{2}+2\right)} \cdot \left(\frac{n+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = 4D$$

Abbiamo utilizzato le identità

$$z > 0, \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} s^{(z-1)} e^{-s} ds = \int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{(z-1)} dt$$

$t = e^{-s}$

$$(g) \quad \lambda^{-z} \Gamma(z) = \int_0^1 t^{(\lambda-1)} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{(z-1)} dt \quad \forall \lambda > 0, z > 0$$

Per mostrare (g), consideriamo

$$G(\lambda) = \lambda^z \int_0^1 t^{(\lambda-1)} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{(z-1)} dt,$$

e osserviamo che:

$$G(1) = \int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{(z-1)} dt = \Gamma(z).$$

Quindi, per ottenere (g) sarà sufficiente mostrare

$$\begin{aligned} 0 &= G'(\lambda) = z \lambda^{(z-1)} \int_0^1 t^{(\lambda-1)} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{z-1} dt + \lambda^z \int_0^1 t^{(\lambda-1)} \ln t \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{z-1} dt \\ &= \lambda^{z-1} \left[z \int_0^1 t^{(\lambda-1)} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{z-1} dt - \lambda \int_0^1 t^{(\lambda-1)} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^z dt \right] \end{aligned}$$

Integrando per parti troviamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{(\lambda-1)} \left(\ln \left(\frac{1}{t} \right) \right)^z dt &= \left. \frac{t^\lambda}{\lambda} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^z \right|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{z}{\lambda} t^\lambda \left(-\frac{1}{t} \right) \left(\ln \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{z-1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{z}{\lambda} t^{(\lambda-1)} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{z-1} dt \Rightarrow [] = 0 \end{aligned}$$

26

Dim del PM forte (Teo 3, p. 21)

Sia u sottosol. eqz. omogenea del calore e supponiamo

$$u(t_0, x_0) = M = \max_{\overline{Q_T}} u, \quad (t_0, x_0) \in]0, T] \times \Omega$$

Passo 1: $\exists r_0$ t.c. $E_D(t_0, x_0, r) \subseteq Q_T \quad \forall r \leq r_0$

Applicando il Teo del valor medio troviamo:

$$M = u(t_0, x_0) \leq \frac{1}{4D r_0^n} \iint_{E_D(t_0, x_0, r)} u(t, x) \frac{|x - x_0|^2}{(t - t_0)^2} dx dt$$

$$\leq \frac{M}{4D r^n} \iint_{E_D(t_0, x_0, r)} \frac{|x - x_0|^2}{(t - t_0)^2} dx dt = M$$

si noti che si

$$\left(\frac{1}{r^n} \iint_{E_D(t_0, x_0, r)} \frac{|x - x_0|^2}{(t - t_0)^2} dx dt = 4D \right) \quad (10)$$

$$M = \Leftrightarrow u(t, x) = M$$

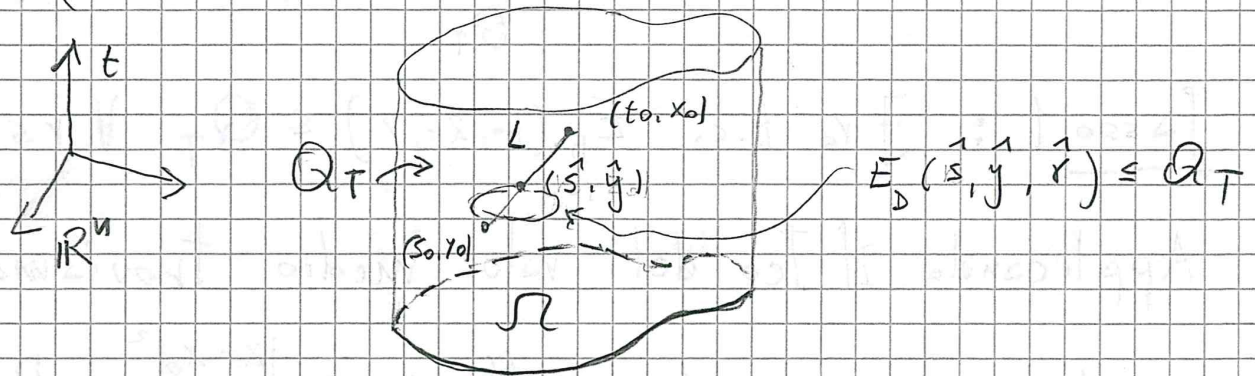
$$\forall (t, x) \in E_D(t_0, x_0, r)$$

$$\Rightarrow u = M \quad \text{su} \quad E_D(t_0, x_0, r) \quad \forall r \leq r_0$$

Passo 2: Sia $(s_0, y_0) \in Q_T$ connesso a (t_0, x_0) da un segmento $L \subseteq Q_T$, $s_0 < t_0$

e consideriamo:

$$\hat{s} = \min \left\{ s \in [s_0, t_0] ; u(t, x) = M \quad \forall (t, x) \in L \right. \\ \left. \begin{array}{l} t \in [s, t_0] \\ \text{min esiste perché } u \text{ è continua} \end{array} \right\}$$



Supponiamo $\hat{s} > s_0$, $(\hat{s}, \hat{y}) \in L \subseteq Q_T$

$\Rightarrow u = M$ su $E_D(\hat{s}, \hat{y}, \hat{r}) \subseteq Q_T$ per $\hat{r}$ suff. piccolo

$M_\Delta \cap L_r \doteq L \cap \{(t, x) \in Q_T ; t \in [\hat{s} - \sigma, \hat{s}]\} \subseteq E_D(\hat{s}, \hat{y}, \hat{r})$
per qualche $0 < \sigma < \hat{s} - s_0$ suff. piccolo $s_0 \geq 0$.

$\Rightarrow u = M$ su L_σ che è in contraddizione con la def. di $\hat{s}$

$\Rightarrow \hat{s} = s_0 \Rightarrow u = M$ su tutto L .

Passo 3 : fissato $x \in \Omega$, $t \in [0, t_0]$

poiché Ω è connesso e dunque in particolare è connesso per poligonalità, esistevano $\{x_1, x_2, \dots, x_m = x\} \subseteq \Omega$

27

t.c. segmenti (in $\mathbb{R}^n$) che connettono x_{i-1} a x_i ,
 $i=1, \dots, m$, sono tutti contenuti in Ω .

Selezioniamo allora tempi $t_0 > t_1 > t_2 > \dots > t_m = x$.

Ne segue che i segmenti (in $\mathbb{R}^{n+1}$) che connettono
 (t_{i-1}, x_{i-1}) a (t_i, x_i) sono contenuti in Q_T e

quindi, grazie al Passo 2, deduciamo che

$$u(t, x) = M \quad \forall (t, x) \in [0, t_0] \times \overline{\Omega}.$$

Per continuità di u , segue

$$u(t_0, x) = M \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

□

9. Principio (Lemma) di Hopf

Abbiamo utilizzato il PM debole per mostrare unicità della sol. pb al bordo con condizioni di Dirichlet per equazione del calore non omogenea. Per ottenere un risultato di unicità nel caso di condizioni al bordo di Neumann o Robin stabiliremo ora un risultato che riguarda la derivata normale della soluzione in un punto di massimo o di minimo sulla frontiera laterale parabolica $]0, T] \times \partial \Omega$.

Teorema 1 (Principio di Hopf)

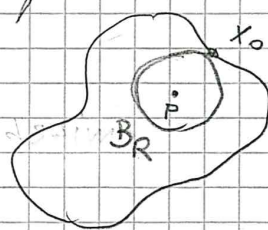
Sia $u \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, $Q_T =]0, T] \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, una sottosoluzione dell'eq. omogenea del calore e supponiamo che: $(x_0 \in \partial B_R(p))$,

i) $x_0 \in \partial \Omega$ ha la proprietà della sfera interna:
 $\exists B_R(p) \subset \Omega$ tangente in x_0 a $\partial \Omega$

ii) $(t_0, x_0) \in]0, T] \times \partial \Omega$ è t.c. di massimo

$$u(t_0, x_0) = \max_{\bar{Q}_T} u = M$$

$$u(t, x) < M \quad \forall (t, x) \in [0, t_0[\times \Omega$$



28 / iii) $\exists \partial_{\underline{n}} u(t_0, x_0)$, $\underline{n}$: normale esterna a Ω

Allora si ha:

$$(1) \quad \partial_{\underline{n}} u(t_0, x_0) \geq 0$$

(Se (t_0, x_0) è punto di min con analoghe proprietà di sopra e u è soprassol. dell'eqz. omogenea del calore, allora si ha $\partial_{\underline{n}} u(t_0, x_0) < 0$)

Nota: essendo (t_0, x_0) punto di massimo, dovrà necessariamente essere $\partial_{\underline{n}} u(t_0, x_0) \geq 0$.

La condizione (1) ci dice quindi che $\partial_{\underline{n}} u(t_0, x_0) \neq 0$.

Dim:

Passo 1: Possiamo supporre $M = u(t_0, x_0) = 0$

$$\Rightarrow u(t, x) < 0 \quad \forall (t, x) \in [0, t_0] \times \Omega.$$

Consideriamo il segmento

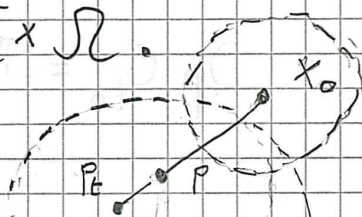
$$P_t = P + \beta(t_0 - t)(P - x_0), \quad t \in [\tau_0, t_0]$$

$$(P_{t_0} = P)$$

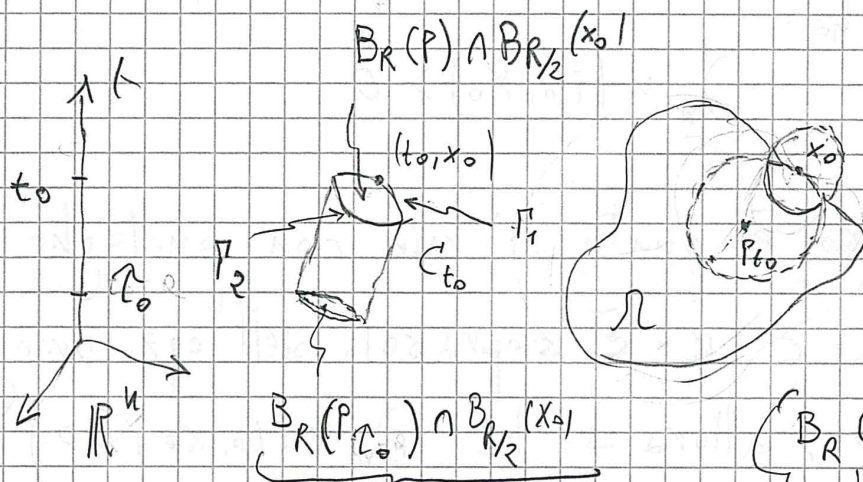
$t_0 - \tau_0, \beta > 0$ suff. piccoli,

e il cilindro obliquo

$$C_{t_0} = \bigcup_{t \in [\tau_0, t_0]} \{t\} \times (B_R(P_t) \cap B_{R/2}(x_0))$$



(Nota che $B_R(p_{t_0}) \cap B_{R/2}(x_0) \neq \emptyset$ poiché $x_0 \in \partial B_R(p)$)



Sceghieremo $t_0 - t_0, \beta > 0$ suff. piccoli t.c. $\left\{ \begin{array}{l} B_R(p_t) \cap B_{R/2}(x_0) \neq \emptyset \\ \forall t \in [t_0, t_0] \end{array} \right\}$ e $C_{t_0} \subseteq Q_T$

Supponiamo che esista una soprasol. dell'eqz. del calore w su C_{t_0} con le seguenti proprietà:

- i) $w(t_0, x_0) = 0, \quad \partial_n w(t_0, x_0) > 0$
- ii) $w(t, x) \geq u(t, x) \quad \forall (t, x) \in \partial_p C_{t_0}$

$$\partial_p C_{t_0} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_0 = \{t_0\} \times \overline{B_R(p_{t_0}) \cap B_{R/2}(x_0)}$$

$$\Gamma_1 = \bigcup_{t \in [t_0, t_0]} \{t\} \times (\partial B_R(p_t) \cap B_{R/2}(x_0))$$

$$\Gamma_2 = \bigcup_{t \in [t_0, t_0]} \{t\} \times (\overline{B_R(p_t) \cap \partial B_{R/2}(x_0)})$$

Si osservi che $w - u$ è soprasol. dell'eqz. del calore su C_{t_0} . Per il PM. debole allora si ha

$$\min_{C_{t_0}} w - u = \min_{\partial_p C_{t_0}} w - u \geq 0$$

29/

$$\Rightarrow w(t, x) \geq u(t, x) \quad \forall (t, x) \in \overline{C}_{t_0}$$

Essendo $w(t_0, x_0) = u(t_0, x_0) = 0$, ed osservando che la normale esterna a Ω in x_0 è

$$\underline{n} = \frac{x_0 - p}{R}, \text{ troviamo che } \forall h > 0 \text{ si ha}$$

$$\frac{w(t_0, x_0 - h \underline{n}) - w(t_0, x_0)}{h} \geq \frac{u(t_0, x_0 - h \underline{n}) - u(t_0, x_0)}{h}$$

Passando al lim per $h \rightarrow 0^+$ deduciamo

$$\begin{aligned} D_{\underline{n}} w(t_0, x_0) &\geq D_{\underline{n}} u(t_0, x_0) \\ &= \partial_{\underline{n}} w(t_0, x_0) = \partial_{\underline{n}} u(t_0, x_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_{\underline{n}} u(t_0, x_0) \geq \partial_{\underline{n}} w(t_0, x_0) > 0,$$

Passo 2 : costruiamo sopra sol. w con le proprietà

i) - ii). Consideriamo

$$w(t, x) = e^{-\alpha R^2} - e^{-\alpha |x - p_t|^2}, \quad (t, x) \in \overline{C}_{t_0}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

Si osserva che:

$$\partial_t w = \alpha e^{-\alpha |x - p_t|^2} (2\beta) ((p_t - x) \cdot (p - x_0))$$

$$\Delta w = 2n\alpha e^{-\alpha |x - p_t|^2} - 4\alpha^2 e^{-\alpha |x - p_t|^2} |x - p_t|^2$$

$$\Rightarrow w_t - D \Delta w = 2\alpha e^{-\alpha |x-p_t|^2} \left[p((p_t-x) \cdot (p-x_0)) - nD + 2\alpha D |x-p_t|^2 \right] \geq$$

$$\geq 2\alpha e^{-\alpha |x-p_t|^2} \left[p \gamma_1 - nD + 2\alpha D \frac{R^2}{4} \right] > 0$$

$$\gamma_1 = \inf_{(t,x) \in \bar{C}_{t_0}} (p_t - x) \cdot (p - x_0) > -\infty$$

se scegliamo
 α suff. grande.

$$\inf_{(t,x) \in \bar{C}_{t_0}} |x-p_t| \geq \inf_{x \in B_R(p) \cap B_{R/2}(x_0)} |x-p| \geq R/2$$

Osserviamo inoltre che:

a) $w(t_0, x_0) = 0$ poiché $p_{t_0} = p, |x_0 - p| = R$
 $w(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \Gamma_1$ poiché $(t, x) \in \Gamma_1 \Rightarrow |x - p_t| = R$

b) $\Rightarrow w(t, x) \geq u(t, x) \quad \forall (t, x) \in \Gamma_1$

D'altra parte si osservi che

$$\gamma_2 \doteq \sup_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} u < 0$$

$$\cup B_R(p_{t_0}) \cap B_{R/2}(x_0)$$

altrimenti ci sarebbe $(\hat{t}, \hat{x}) \in \Gamma_0 \cup \Gamma_2$ t.c. $u(\hat{t}, \hat{x}) = 0$

ma $\Gamma_0 \cup \Gamma_2 \subseteq]0, T] \times \Omega$ e applicando il PM forte

$\Rightarrow$ la componente connessa di Ω che contiene $\cup_{t \in]t_0, t_0+1]} B_R(p_t) \cap B_{R/2}(x_0)$

30

dedurremmo che $u = 0$ su $[0, \hat{t}] \times \bar{\Omega}$
 contraddicendo l'ipotesi che $u(t, x) < 0$
 $\forall (t, x) \in [0, t_0] \times \Omega$.

Notiamo adesso che

$$|x - p_t| \geq \frac{R}{2} \quad \forall (t, x) \in C_{t_0} \Rightarrow$$

$$w(t, x) \geq e^{-\alpha R^2} - e^{-\frac{\alpha}{4} R^2} > \frac{\gamma_2}{2} \quad \text{per } \alpha \text{ suff. grande}$$

$$\forall (t, x) \in C_{t_0} \Rightarrow$$

$$c) \quad w(t, x) > \gamma_2 \geq u(t, x) \quad \forall (t, x) \in \Gamma_0 \cup \Gamma_2$$

$\Rightarrow$ b), c) provano la proprietà ii) di w .

Per concludere, resta solo da calcolare la derivata

normale di w : $\underline{n} = \frac{x_0 - p}{R}$

$$\partial_n w(t_0, x_0) = 2\alpha e^{-\alpha R^2} \left((x_0 - p) \cdot \frac{(x_0 - p)}{R} \right)$$

$$= 2\alpha R e^{-\alpha R^2} > 0 \quad \text{che prova i)}$$

□

Corollario 1 (unicità per il problema di Neumann/Robin)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto gode della proprietà Robinson della sfera interna in ogni punto della frontiera $\partial\Omega$. Allora esiste al più una sol. $u \in C_{t,x}^{1,2}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$

$\Omega_T =]0, T[\times \Omega$ di

$$(P1B)_{N/R} \left\{ \begin{array}{ll} u_t - D\Delta u = f(t, x) & \text{su } \Omega_T \\ u(0, x) = g(x) & \text{su } \bar{\Omega} \\ \partial_n u(t, x) + \alpha u(t, x) = h(t, x) & \text{su }]0, T[\times \partial\Omega \end{array} \right.$$

$(\alpha \geq 0)$

che ammette derivate normale in ogni punto di $]0, T[\times \partial\Omega$

Dim: Siano u, v sol. che soddisfanno le ipotesi del Corollario. Consideriamo

$$w = v - u$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} w_t - D\Delta w = 0 & \text{su } \Omega_T \\ w(0, x) = 0 & \text{su } \bar{\Omega} \\ \partial_n w(t, x) + \alpha w(t, x) = 0 & \text{su }]0, T[\times \partial\Omega \end{array} \right.$$

Se $w \neq 0$, supponiamo $w(t_0, x_0) = \max_{\bar{\Omega}_T} w = M > 0$

31

Se $x_0 \in \Omega$, applicando il PM forte alla componente connessa di Ω che contiene x_0 , dedurremmo che $W = 0$ su $[0, t_0] \times \bar{\Omega}$ contraddicendo la condizione iniziale nulla.

$$\Rightarrow x_0 \in \partial \Omega \text{ se } W(t_0, x_0) > W(t, x) \\ \forall (t, x) \in [0, t_0] \times \Omega$$

Per il lemma di Hopf avremmo quindi:

$$\partial_n W(t_0, x_0) > 0$$

in contraddizione con la condiz. al bordo

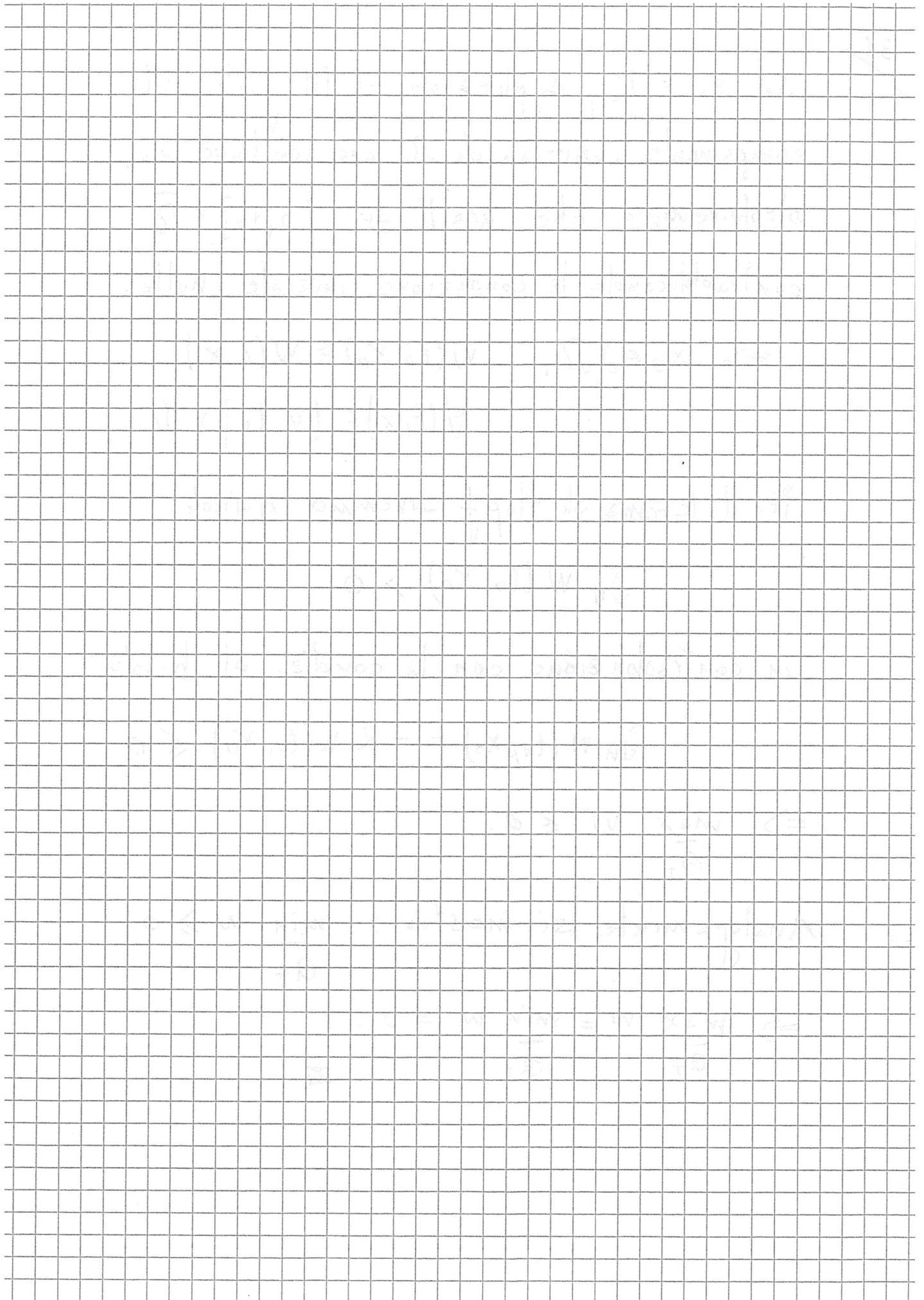
$$\partial_n W(t_0, x_0) = -\alpha W(t_0, x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow \max_{\bar{Q}_T} W \leq 0.$$

Analogamente si mostra: $\min_{\bar{Q}_T} W \geq 0$

$$\Rightarrow \max_{\bar{Q}_T} W = \min_{\bar{Q}_T} W = 0.$$

□



10. La soluzione fondamentale

Un passo importante nello studio di una EDP è spesso la produzione di qualche soluzione specifica. Nel caso dell'eqz. del calore ci sono delle soluzioni "privilegiate" mediante le quali possiamo costruirne molte altre.

Abbiamo osservato:

- Invarianza di sol. rispetto a riflessioni nello spazio $x \mapsto -x$ e rispetto a dilatazioni paraboliche $(t, x) \mapsto (at, \sqrt{a}x)$, $a > 0$ che lasciano invariata la quantità $\frac{|x|^2}{t}$
- Palla del calore definita in termini di insiemi di livello della funzione

$$P_D(t, x) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}, \quad t > 0.$$

Pb: cerchiamo una sol. dell'eqz. del calore che descriva propagaz del calore in una sbarra infinita (filo molto lungo) sottoposta ad una sorgente istantanea di calore inizialmente concentrata

in un punto (che poniamo nell'origine).

Data l'assenza di sorgenti distribuite non c'è produzione o assorbimento di calore $\Rightarrow$ energia rimane costante $\Rightarrow$

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = Q = \frac{E}{\rho c_v} \quad \forall t \geq 0$$

↑
densità di temperatura

Per argomenti di "analisi dimensionale" connessi alle quantità t, x, D, Q , deduciamo che la sol. cercata deve avere la forma

$$(2) \quad u(t, x) = \frac{Q}{\sqrt{Dt}} U\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$$

per un'opportuna funzione $U = U(z)$, pari, $U \geq 0$.

Notiamo che (1) $\Rightarrow$

$$Q = \frac{Q}{\sqrt{Dt}} \int_{\mathbb{R}} U\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) dx = Q \int_{\mathbb{R}} U(z) dz \Rightarrow$$

$z = \frac{x}{\sqrt{Dt}}$

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}} U(z) dz = 1 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(z) = 0$$

(supponendo che U
ammetta $\lim_{z \rightarrow \pm\infty}$)

33

D'altra parte, poiché cerchiamo U pari,
possiamo supporre $U'(0) = 0$. Cercheremo
quindi: $U: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ t.c.

$$(4) \quad U'(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} U(z) = 0$$

e che soddisfi (3).

Per determinare U imponiamo che u def in (z)
sia sol. dell'eq. del calore:

$$u_t = \frac{Q}{\sqrt{D}} \left[-\frac{1}{2} t^{-3/2} U\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{D}} x \cdot t^{-2} U'\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) \right]$$

$$= -\frac{Q}{2t\sqrt{Dt}} \left[U\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) + \frac{x}{\sqrt{Dt}} U'\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) \right]$$

$$u_{xx} = \frac{Q}{(Dt)^{3/2}} U''\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) \Rightarrow$$

$$u_t - D u_{xx} = -\frac{Q}{t\sqrt{Dt}} \left[U''\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) + \frac{x}{2\sqrt{Dt}} U'\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) + \frac{1}{2} U\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) \right]$$

$\Downarrow$
Cerchiamo $U = U(z) \geq 0$, $z \geq 0$ sol. di:

$$(5) \quad \begin{cases} U'' + \frac{1}{2} z U' + \frac{1}{2} U = 0 \\ U'(0) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} U(z) = 0 \end{cases}$$

che soddisfi (3).

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} \left[U'(z) + \frac{1}{2} z U(z) \right] = 0$$

$$\Rightarrow U'(z) + \frac{1}{2} z U(z) = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$U'(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$$

$$(6) \quad U' + \frac{1}{2} z U = 0 \quad \text{eq. diff del 1° ord. a var. separabili}$$

Un integrale generale di (6) è

$$U(z) = C_0 e^{-\frac{z^2}{4}}, \quad C_0 \in \mathbb{R}$$

che soddisfa $\lim_{z \rightarrow +\infty} U(z) = 0$.

Rimane da scegliere C_0 in modo che sia verificata

$$(3) \Rightarrow 1 = \int_{\mathbb{R}} C_0 e^{-\frac{z^2}{4}} dz = 2 C_0 \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} dv = 2 C_0 \sqrt{\pi}$$

($\frac{z}{2} = v$)

$$\Rightarrow C_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Rightarrow \boxed{u(t, x) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad t > 0}$$

Se $Q = 1$ ritroviamo la funzione Γ_D della palla del calore.

34

Con ragionamenti analoghi troviamo che una sol. dell'eqz. del calore che descrive la diffusione del calore (o di una massa) in $\mathbb{R}^n$ a partire da una sorgente istantanea inizialmente concentrata nell'origine di massa totale $Q=1$ ha l'espressione

$$(7) \quad \Gamma_D(t, x) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}, \quad t > 0$$

La funzione (7) si chiama sol. fondamentale o nucleo del calore.

Proprietà della sol. fondamentale

i) $\Gamma_D \in C^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}^n)$

ii) $\Gamma_D(t, x) > 0 \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n$

iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t, x) dx = 1 \quad \forall t > 0$

$$\left(\frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}} dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2} dz_i \right. \\ \left. \left(z = \frac{x}{2(Dt)^{1/2}}, \quad dz = \frac{dx}{2^n (Dt)^{n/2}} \right) = 1 \right) \leftarrow$$

Problema di Cauchy omogeneo

$$(8) \quad \begin{cases} u_t - D \Delta u = 0 & (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \\ u|_{0, x} = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Nota: per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ fissato

$$\phi_y(t, x) = \Gamma_D(t, x - y), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

è sol. dell'eqz. del calore omogenea

$\Rightarrow$ (principio di sovrapposizione)

$$u(t, x) = \Gamma_D(t, \cdot) * g = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t, x - y) g(y) dy$$

$$(9) \quad = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y) dy$$

è anche sol. dell'eqz. del calore omogenea.

Nel caso di g continua a pezzi e con crescita al più esponenziale u risulta essere sol. del PC (8).

35 / Esistenza di soluzioni (cfr. Cannon, 1D heat eqn, p. 36, 38, 40)

Teorema Sia $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- i) $\exists \Omega_j \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti connessi, $\mathbb{R}^n = \bigcup_j \Omega_j$
 g continua su ogni Ω_j
- ii) $|g(x)| \leq c_1 e^{\alpha_1 |x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ ($c_1, \alpha_1 > 0$)

Allora si ha:

1) La funzione $u(t, x)$ definita in (9) è ben definita su $]0, T[\times \mathbb{R}^n$, $T < \frac{1}{4D\alpha_1}$

e $u \in C^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^n)$, e soddisfa

$$u_t - D\Delta u = 0 \quad \text{su }]0, T[\times \mathbb{R}^n$$

2) Se K è un compatto contenuto in un Ω_j ,

$$\text{allora} \quad \lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = g(x)$$

uniformemente su K

$$3) \quad |u(t, x)| \leq c_2 e^{\alpha_2 |x|^2} \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$$

per qualche costante $c_2, \alpha_2 > 0$ (che dipendono da T)

Nota 1: le ipotesi i) ii) sono sicuramente soddisfatte se g è continua e limitata.

Nota 2 Se si suppone i) e

ii)' $|g(x)| \leq C_1 e^{\alpha_1 |x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \alpha < 2$

allora la funzione in (9) è ben definita
su $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$, $u \in C^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}^n)$,
e soddisfa eqz. omogenea del calore.

Inoltre si ha la convergenza al dato iniziale 2)
e la stima uniforme

$$|u(t, x)| \leq C_2 e^{\alpha_2 |x|^2} \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$$

per qualche costante $C_2, \alpha_2 > 0$.

Dim:

Passo 1: mostriamo che l'integrale in (9) è
convergente se:

$$|g(x)| \leq C_1 e^{\alpha_1 |x|^2}, \quad t \leq \frac{1-\varepsilon}{4D\alpha_1}, \quad \varepsilon > 0 \quad (10)$$

e che vale la stima in (3),

• Assumiamo prima $|x| \leq 1$.

$$\frac{1}{(4Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} e^{\alpha_1 |y|^2} dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} e^{\alpha_1 (|x| + 2\sqrt{tD}|z|)^2} dz \leq$$

$\left(z = \frac{x-y}{2\sqrt{tD}}, y = x - 2\sqrt{tD}z, dz = \frac{1}{(4Dt)^{n/2}} dy \right)$

36

$$\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} e^{\left[|x| + \frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{\theta_1}} |z|\right]^2} dz$$

$t \leq \frac{1-\varepsilon}{4D\theta_1}$

$$\leq 2 e^{\theta_1 |x|^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon |z|^2} e^{2\sqrt{\theta_1} |z| |x|} dz$$

Adesso distinguiamo due casi:

- Assumiamo $|x| \leq 1$

Dalle stime precedenti deduciamo:

$$\frac{1}{(4Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} e^{\theta_1 |y|^2} dy \leq 2 e^{\theta_1 |x|^2} I,$$

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon |z|^2 + 2\sqrt{\theta_1} |z|} dz$$

$dz < \infty$ e concludiamo

che integrale in (9)
è convergente e
vale la limitaz. sup.
3) con $\theta_2 = \theta_1$

- Assumiamo $|x| > 1$:

$$\frac{1}{(4Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} e^{\theta_1 |y|^2} dy \leq$$

$$\leq 2 \left[e^{\theta_1 \left(1 + \frac{6}{\varepsilon}\right) |x|^2} \int_{|z| \leq \frac{3\sqrt{\theta_1}}{\varepsilon} |x|} e^{-\varepsilon |z|^2} dz + e^{\theta_1 |x|^2} \int_{|z| > \frac{3\sqrt{\theta_1}}{\varepsilon} |x|} e^{-\sqrt{\theta_1} |z| |x|} dz \right] \leq$$

$$\leq 2 \left[e^{\theta_1 \left(1 + \frac{6}{\varepsilon}\right) |x|^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon |z|^2} dz + e^{\theta_1 |x|^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sqrt{\theta_1} |z|} dz \right]$$

Poiché $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon |z|^2} dz$, $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sqrt{\theta_1} |z|} dz$ sono convergenti,

deduciamo che integrale in (9) è convergente e vale la limitaz. sup. 3) con $\theta_2 = \theta_1 \left(1 + \frac{6}{\varepsilon}\right)$

Nota: se supponiamo:

$$|g(x)| \leq C_1 e^{\theta_1 |x|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 2, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

con gli stessi ragionamenti di prima deduciamo:

$$\frac{1}{(4Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} e^{\theta_1 |y|^\alpha} dy \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} e^{\theta_1 |x|^\alpha} \left[1 + 2\sqrt{TD} \left| \frac{z}{x} \right| \right]^\alpha dz \leq$$

$$\leq 2 \left[e^{\theta_1 (1+2\sqrt{TD})^\alpha |x|^\alpha} \int_{|z| < |x|} e^{-|z|^2} dz + \right.$$

$$\left. + e^{\theta_1 |x|^\alpha} \int_{|z| > |x|} e^{-|z|^2} + \theta_1 \left\{ 2\sqrt{TD} |z|^\alpha + 2\sqrt{TD} |x|^{\alpha-1} |z| + (2\sqrt{TD} |z|) |x| \right\} dz \right]$$

(Se $1 \leq \alpha < 2$, utilizziamo la stima $(a+b)^\beta \leq a^\beta + b^\beta$, $a, b > 0$, $0 < \beta < 1$
Un conto analogo vale se $0 \leq \alpha < 1$)

$$\leq 2 \left[e^{\theta_1 (1+2\sqrt{TD})^\alpha |x|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz + e^{\theta_1 |x|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2 + c_3 |z|^\alpha} dz \right]$$

(per qualche costante $c_3 > 0$)

37/ Si conclude quindi come prima che l'integrale in (9) è converg. e vale la limitaz. sup. 3) con $\varrho_2 = \varrho_1(1+2\sqrt{TD})^n$

Passo 2 La funzione u in (9) è derivabile

infinite volte in $]0, T] \times \mathbb{R}^n$, $T < \frac{1}{4De_1}$ e si ha

$$u_t(t, x) - D \Delta u(t, x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t - \Delta_x] \Gamma_D(t, x-y) g(y) dy = 0$$

perché Γ_D è sol. dell'eqz. omogenea del calore.

Passo 3 Sia $K \subseteq \Omega_j$ compatto. Poiché g è uniformemente continua su K , fissato $\varepsilon > 0$ troviamo $\delta > 0$ t.c. $B(K, \delta) \subseteq \Omega_j$ e

$$x \in K, |x-y| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(x)| < \varepsilon$$

Allora si ha: (Prop. iii) p. 34)

$$\begin{aligned} |u(t, x) - g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t, x-y) (g(y) - g(x)) dy \right| \\ &\leq \int_{B(x, \delta)} \Gamma_D(t, x-y) |g(y) - g(x)| dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \delta)} \Gamma_D(t, x-y) |g(y) - g(x)| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t, x-y) dy}_{=1} + \frac{2C_1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{|y-x| > \delta} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} e^{\varrho_1 |y|^2} dy \leq \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon + C_4 e^{Q_1 |x|^2} \int_{|z| > \frac{d}{2\sqrt{tD}}} e^{-\varepsilon |z|^2} e^{2\sqrt{Q_1} |x| |z|} dz \leq$$

(Come in Passo 1)
p. 35-36

$$\leq \varepsilon + C_5 \int_{|z| > \frac{d}{2\sqrt{tD}}} e^{-\varepsilon |z|^2 + C_6 |z|} dz$$

($x \in K$ compatto)

Si osservi ora che, poiché $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon |z|^2 + C_6 |z|} dz$

è convergente, fissato $\varepsilon > 0 \quad \exists p_\varepsilon > 0$ t.c.

$\int_{|z| > p_\varepsilon} e^{-\varepsilon |z|^2 + C_6 |z|} dz < \varepsilon$. Deduciamo che

$$\int_{|z| > \frac{d}{2\sqrt{tD}}} e^{-\varepsilon |z|^2 + C_6 |z|} dz < \varepsilon \quad \forall t \in]0, \tau_\varepsilon[,$$

$$\tau_\varepsilon = \frac{d^2}{4D p_\varepsilon^2}$$

$\Rightarrow |u(t, x) - g(x)| < (1 + C_5) \varepsilon \quad \forall t \in]0, \tau_\varepsilon[, x \in K,$
il che completa la dim di 2) e conclude la dim. del Teorema.

38

Nota 3: La sol. fondamentale dell'eqz.

del calore soddisfa:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma_D(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t, x) dx = 1 \quad \forall t > 0$$

Possiamo dire che $\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma_D(t, x)$ si comporta come la misura di Dirac in 0: $\delta_0(x)$

Formalmente, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ fissato, si ha dunque:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma_D(t, x - y) = \delta_0(x - y) = \delta_0(y)$$

e possiamo reinterpretare il lim in 2) come

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_x(y) g(y) dy = g(x).$$

Per questo motivo, a volte si dice che il nucleo del calore Γ_D in $(\mathbb{R})$ è sol.

del pb. di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - D \Delta u = 0 & (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = f_0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Nota 4: se il dato iniziale f soddisfa

l'ipotesi i) del Teorema, è limitato, non negativo, ma non nullo, allora la formula (9) di rappresentazione della sol. $u(t, x)$ del Pb. di Cauchy (8) ci dice che $u(t, x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0$.

Questa proprietà è analoga a quella osservata nella Nota di p. 21, relativa alla sol. del Pb misto ai dati iniziali ed al bordo con condizioni al bordo di Dirichlet nulle, che interpretiamo dicendo che l'equazione del calore determina una propagazione dell'informazione (delle perturbazioni) con velocità infinita, a differenza di quanto avviene per l'equazione delle onde o per equazioni di tipo iperbolico.

11. Problemi non omogenei e Principio di Duhamel

Consideriamo il problema di Cauchy non omogeneo

$$(1) \begin{cases} u_t - D \Delta u = f(t, x) & (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = 0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Metodo di Duhamel per costruzione di sol.

di (1) a partire dalla sol. del pb. omogeneo

$$(f = 0)$$

1. Costruiamo una famiglia di sol. del pb di Cauchy omogeneo con tempo iniziale $t=s$ variabile, e dato iniziale $f(x, s)$:

$$(2)_s \begin{cases} u_t - D \Delta u = 0 & (t, x) \in]s, +\infty[\times \mathbb{R}^n \\ u(s, x) = f(s, x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Ricordando la formula (9) di p. 34, si ha che

$$u(t, x; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t-s, x-y) f(s, y) dy, \quad t > s, x \in \mathbb{R}^n$$

è la sol. di $(2)_s$.

2. Integriamo la famiglia trovata di sol. rispetto al parametro $s \in [0, t]$

$$u(t, x) = \int_0^t u(t, x; s) ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t-s, x-y) f(s, y) dy ds$$

$$(3) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi D(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4D(t-s)}} f(s, y) dy ds, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$$

Si noti che $u(0, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, e derivando formalmente in (3), si trova:

$$u_t - D \Delta u = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} \Gamma_D(t, x-y) f(t, y) dy}_{u(t, x; t)} +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\partial_t - D \Delta_x) \Gamma_D(t-s, x-y)}_{=0} f(s, y) dy =$$

$$= f(t, x).$$

↑
(v. Nota 3 p. 38)

Tuttavia lo scambio delle operazioni di derivazione e integrazione non è corretto poiché

40 / $\partial_t \Gamma_D$ e $\Delta \Gamma_D$ non sono in $L^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}^n)$.

a causa della singolarità di Γ_D in $(t, x) = (0, 0)$
 $(\Gamma_D$ invece è una funzione di $L^1([0, T] \times \mathbb{R}^n)$).

Sotto opportune ipotesi sulla funzione f
 si possono calcolare le derivate di u
 effettuando dapprima un cambiamento di
 variabili nella formula (3):

$$(4) \quad u(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t-s, x-y) f(s, y) dy ds =$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\tau, z) f(t-\tau, x-z) dz d\tau$$

($\tau = t-s$
 $z = x-y$)

Teorema 1 (Esistenza di sol. eq. non omogenea)

Sia $f \in \mathcal{C}_{t,x}^{1,2}([0, +\infty[\times \mathbb{R}^n)$ limitata, con derivate f_t, f_x, f_{xx} limitate. Allora si ha:

1) La funzione $u(t, x)$ in (3) è ben definita su $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$,

$u \in \mathcal{C}_{t,x}^{1,2}([0, +\infty[\times \mathbb{R}^n)$ e soddisfa

$$u_t - D \Delta u = f(t, x) \text{ su }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$$

2) $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta$

$$|u(t, x)| \leq \|f\|_{L^\infty} t \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = 0 \quad \text{uniformemente su } \mathbb{R}^n$$

Dim:

Passo 1: poiché f_t, f_x, f_{xx} sono limitate e

$\Gamma_D \in L^1([0, T] \times \mathbb{R}^n) \quad \forall T > 0$, possiamo derivare u in (4) rispetto a t ed a x differenziando sotto il segno d'integrale:

$$u_t(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t, z) f(0, x-z) dz + \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\tau, z) \partial_t f(t-\tau, x-z) dz d\tau$$

$$u_{x_i x_j}(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\tau, z) \partial_{x_i x_j} f(t-\tau, x-z) dz d\tau$$

$\Rightarrow u \in C_{t,x}^{1,2}([0, +\infty[\times \mathbb{R}^n)$. Per mostrare che u è sol. di (1) utilizzando il fatto che Γ_D è sol. dell'eqz. omogenea occorre isolare la singolarità

41/ degli integrali di sopra in $t=0$. Passo 2:
 fissiamo $0 < p < t$ e scambiando la differenziazione
 di f rispetto a t e x con quella rispetto
 a τ e z troviamo:

$$u_t(t, x) - D \Delta u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t, z) f(0, x-z) dz + \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\tau, z) (\partial_t - D \Delta_x) f(t-\tau, x-z) dz d\tau$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t, z) f(0, x-z) dz}_A + \\ + \underbrace{\int_0^p \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\tau, z) (-\partial_\tau - D \Delta_z) f(t-\tau, x-z) dz d\tau}_{I_p} + \\ + \underbrace{\int_p^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\tau, z) (-\partial_\tau - D \Delta_z) f(t-\tau, x-z) dz d\tau}_{J_p}$$

$$= A + I_p + J_p. \quad (5)$$

Si noti che

$$I_p \leq \left(\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty} \right) \int_0^p \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(\tau, z) dz d\tau \\ \leq \left(\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty} \right) \cdot p$$

$$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} I_p = 0. \quad (6)$$

D'altra parte, integrando per parti rispetto a τ in J_p troviamo:

$$\begin{aligned} J_p &= - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t, z) f(0, x-z) dz + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(p, z) f(t-p, x-z) dz + \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\partial_\tau - D \Delta_z) \Gamma_D(\tau, z)}_{=0} f(t-\tau, x-z) dz d\tau \\ &= -A + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(p, z) f(t-p, x-z) dz \end{aligned}$$

(poiché Γ_D è sol. eqz. omogenea del calore)

$$\Rightarrow u_t(t, x) - D \Delta u(t, x) = \lim_{p \rightarrow 0} (A + I_p + J_p)$$

(5), (6)

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(p, z) f(t-p, x-z) dz \stackrel{x-z=y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(p, x-y) f(t-p, y) dy$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(p, x-y) f(t-p, y) dy$$

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_D(p, x-\cdot) f(t-p, \cdot) \\ \Gamma_D(p, x-\cdot) f(t, \cdot) \\ |\Gamma_D(p, x-\cdot) f(t-p, \cdot)| \leq \Gamma_D(p, x-\cdot) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{converge puntualm.} \\ \Gamma_D(p, x-\cdot) f(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n) \\ \Gamma_D(p, x-\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n) \end{array} = \lim_{p \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(p, x-y) f(t, y) dy = f(t, x).$$

(come in Teorema di p. 35)

42

Questo conclude la dim di 1) mentre 2) è diretta conseguenza della formula (4).

Combinando il risultato del problema non omogeneo con condizione iniziale nulla e di quello omogeneo troviamo una soluzione del Problema di Cauchy non omogeneo:

$$(7) \begin{cases} u_t - D \Delta u = f(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Teorema 2 (Esistenza di sol. equ. non omogenee con condizione iniziale non nulla)

Sia $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l.r.c.

i) $\exists \Omega_j \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti connessi, $\mathbb{R}^n = \bigcup_j \Omega_j$, $g \in C^1(\Omega_j)$ $\forall j$

ii) $|g(x)| \leq c_1 e^{-c_2 |x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ ($c_1, c_2 > 0$)

$f \in C^{1,2}_{t,x}([0, +\infty[\times \mathbb{R}^n)$ limitata, con derivate f_t, f_x, f_{xx} limitate.

Allora si ha:

1) La funzione

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t, x-y) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_D(t-s, x-y) f(s, y) dy ds \\ (8) \quad &= \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y) dy + \\ &+ \int_0^t \frac{1}{(4\pi D(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4D(t-s)}} f(s, y) dy ds \end{aligned}$$

è ben definita su $]0, T] \times \mathbb{R}^n$, $T < \frac{1}{4De_1}$,

$u \in C_{t,x}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ e soddisfa

$$u_t - D \Delta u = f(t, x) \quad \text{su }]0, T] \times \mathbb{R}^n$$

2) Se K è un compatto contenuto in un $\mathcal{R}_j$, allora

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = g(x)$$

uniformemente su K .

$$3) \quad |u(t, x)| \leq c_2 e^{\rho_2 |x|^2} \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$$

per qualche costante $c_2, \rho_2 > 0$ (dipendente da T).

Diremo che una funzione $u(t, x)$ che soddisfa questa condizione appartiene alla classe di Tychonov.

43

Nota: Se si suppone i), f come nelle ipotesi del Teorema,

ii) $|g(x)| \leq C_1 e^{\alpha_1 |x|^\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \alpha < 2$

allora la funzione in (8) è ben definita su $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$,
 $u \in C_{t,x}^{1,2}([0, +\infty[\times \mathbb{R}^n)$ e soddisfa l'eq. non omogenea
 del calore. Inoltre si ha la convergenza al dato
 iniziale 2) e la stima uniforme

$$|u(t, x)| \leq C_2 (e^{\alpha_2 |x|^\alpha} + t) \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

per qualche costante $C_2, \alpha_2 > 0$.

Dim: il Teorema 2 è conseguenza del Teorema
 di p. 35 e del Teorema 1 di p. 40.

12. Unicità della soluzione del Pb di Cauchy

Controesempio di Tychonov

Vedremo che la condizione 3) del Teo 2 di crescita al più di tipo esponenziale quadratico della soluzione è essenziale per l'unicità della sol. del Pb di Cauchy

1. Consideriamo la funzione

$$(1) \quad \varphi(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}, \quad t > 0,$$

e definiamo

$$(2) \quad u(t, x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Mostriamo che le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t \left(\frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \partial_x^2 \left(\frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$$

convergono uniformemente su $]0, +\infty[\times K$, per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}$.

44

Come conseguenza deduciamo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$$

$$\partial_t u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t \left(\frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\partial_x^2 u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_x^2 \left(\frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} \frac{2n(2n-1)}{(2(n-1))!} \frac{x^{2n-2}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^{m+1} \varphi(t)}{dt^{m+1}} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$m = n-1$

$$\Rightarrow \partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x)$$

$\Rightarrow u$ è sol. del Pb di Cauchy

$$(3) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Chiaramente (3) ammette anche la soluzione nulla

$$u(t, x) \equiv 0.$$

Il pb. nasce dal fatto che la sol. definita in (2) non appartiene alla classe di Tychonov in quanto si può mostrare che la stima migliore per u è

$$(4) \quad |u(t, x)| \leq c e^{\left(\frac{qx^2}{t}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

per opportune costanti $c, q > 0$. Questa stima ci dice che, per tempi piccoli, u cresce all'infinito molto più velocemente dell'esponenziale quadratico della condizione 3) del Teorema 2 di p. 42.

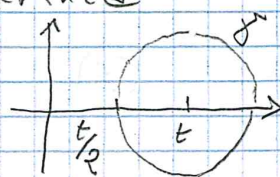
3. Per analizzare adesso la converg. della serie in (2), osserviamo che l'estensione di φ in (1) su $\mathbb{C}$

$$\varphi(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

è una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Identificando l'asse reale del piano complesso con l'asse t , fissiamo $t > 0$ e consideriamo la circonferenza

$$\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} ; z = t + \frac{t}{2} e^{i\vartheta}, 0 < \vartheta \leq 2\pi \right\}$$



45

Usando la formula di Cauchy possiamo allora calcolare

$$\frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{(z-t)^{n+1}} dz$$

$\Downarrow$

$$\left| \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right)}}{|z-t|^{n+1}} |dz| =$$

$$|e^w| = e^{\operatorname{Re}(w)}$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \left(\frac{2}{t}\right)^n \int_0^{2\pi} e^{-\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right)} d\vartheta \leq$$

$$z \in \gamma \Rightarrow \begin{cases} |z-t| = \frac{t}{2} \\ |dz| = \frac{t}{2} d\vartheta \end{cases}$$

$$\leq n! \left(\frac{2}{t}\right)^n e^{-\frac{1}{3t^2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

$$\left(z \in \gamma \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) \geq \frac{1}{3t^2} \right)$$

Mostriamo che se $z \in \gamma$, cioè $z = t(1 + \frac{1}{2}e^{i\theta})$,

allora $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) \geq \frac{1}{3t^2}$

$$i) \quad \frac{1}{z^2} = \frac{1}{t^2} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}e^{-i\theta}\right)^2}{\left|1 + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right|^4} = \frac{1}{t^2} \frac{\left(1 + \frac{1}{4}e^{-2i\theta} + e^{-i\theta}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4} + \cos\theta\right)^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{t^2} \frac{\left(1 + \frac{1}{4}\cos(2\theta) + \cos\theta\right)}{\left(\frac{5}{4} + \cos\theta\right)^2}$$

$$ii) \quad \frac{\left(1 + \frac{1}{4}\cos(2\theta) + \cos\theta\right)}{\left(\frac{5}{4} + \cos\theta\right)^2} = \frac{\frac{1}{4} \left[2(\cos\theta + 1)^2 + 1 \right]}{\left(\frac{5}{4} + \cos\theta\right)^2}$$

Analizzando allora la funzione

$$f(z) = \frac{2(z+1)^2 + 1}{\left(\frac{5}{4} + z\right)^2}, \quad \text{troviamo che}$$

$$f'(z) = 4 \frac{(z-1)}{(5+4z)^3} \Rightarrow$$

f è crescente su $]-\infty, -\frac{5}{4}]$
e su $[1, +\infty[$
è decrescente su $[-\frac{5}{4}, 1]$

46

$\Rightarrow f|_{[-1,1]}$ ha un minimo assoluto in $z=1$

$$\Rightarrow \min_{[-1,1]} f = f(1) = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \min_{\vartheta \in [0, 2\pi]} \frac{\left(1 + \frac{1}{4} \cos(2\vartheta) + \cos \vartheta\right)}{\left(\frac{5}{4} + \cos \vartheta\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9} = \frac{4}{9} > \frac{1}{3}$$

iii) Combinando i) e ii) troviamo che

$$z \in \gamma \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) \geq \frac{1}{t^2} \frac{1}{3}.$$

4. Concludiamo l'analisi della serie in 2).

Poiché abbiamo mostrato in (5) p. 45 che

$$\left| \frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \right| \leq n! \left(\frac{2}{t}\right)^n e^{-\frac{1}{3t^2}}$$

ricorrendo la disuguaglianza di Stirling

$$\frac{2^n n!}{(2^n)!} \leq \frac{1}{n!}$$

deduciamo che, per ogni $Q > 0$ fissato, i termini della serie in 2) sono maggiorati per $|x| < Q$ dai termini della serie

$$e^{-\frac{1}{3t^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^n \frac{(Q^2)^n}{n!} = e^{-\frac{1}{3t^2}} \cdot e^{\frac{Q^2}{t}}$$

che è uniformemente convergente per $t \in]0, +\infty[$.

Con ragionamenti analoghi si mostra la convergenza delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \partial_t \left(\frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \partial_x \left(\frac{d^n}{dt^n} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right).$$

uniformemente su $]0, +\infty[\times K$, $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto.

Si noti che dall'analisi della convergenza della serie in 2) deduciamo che

$$|u(t, x)| \leq e^{\left(\frac{x^2}{t} - \frac{1}{3t^2}\right)} = e^{x^2 \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{3x^2 t^2}\right]}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

e se $x^2 > \frac{1}{t}$ segue che $\frac{1}{t} - \frac{1}{3x^2 t^2} > \frac{2}{3t}$ e quindi

$$\text{deduciamo: } e^{\left(\frac{x^2}{t} - \frac{1}{3t^2}\right)} \geq e^{\frac{x^2}{2t}} \quad \forall t > 0, x^2 > \frac{1}{t},$$

che mostra la validità della stima 4) di p. 44. $\square$

Principio di Massimo per il Problema di Cauchy

Estenderemo il PM debole per sottosol. dell'eqz. del calore su domini limitati a sottosoluz. dell'eqz. del calore definite su tutto $\mathbb{R}^n$ che appartengono alla classe di Tychonov.

Teorema 1 (Principio di Massimo Globale)

Sia $u \in C_{t,x}^{1,2}(S_T) \cap C(\bar{S}_T)$, $S_T =]0, T[\times \mathbb{R}^n$,

t.c. (1) $u_t - D\Delta u \leq 0$ in S_T

e (2) $u(t, x) \leq c_1 e^{\alpha_1 |x|^2}$ in S_T

per qualche costante $\alpha_1, c_1 \geq 0$.

Allora si ha:

$$(3) \quad \sup_{(t,x) \in \bar{S}_T} u(t,x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(0,x)$$

Se si suppone

$$(1) \geq u_t - \Delta u \geq 0 \quad \text{in } S_T$$

$$(2) \geq u(t, x) \geq -c_1 e^{c_1 |x|^2} \quad \text{in } S_T$$

$$\text{allora si ha: } \inf_{S_T} u(t, x) = \inf_{\mathbb{R}^n} u(0, x), \quad (4)$$

Dim:

Passo 1: supponiamo

$$(5) \quad T < \frac{1}{8 D c_1}$$

e consideriamo la funzione

$$(6) \quad w_\mu(t, x) \doteq u(t, x) - \frac{\mu}{(T-t)^{n/2}} e^{\frac{|x|^2}{4D(T-t)}}, \quad t \in]0, T[, \\ (\mu > 0) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

e osserviamo che la funzione

$$(7) \quad \phi(t, x) \doteq \frac{1}{t^{n/2}} e^{\frac{|x|^2}{4Dt}}$$

soddisfa:

$$\phi_t = - \frac{e^{\frac{|x|^2}{4Dt}}}{t^{(\frac{n}{2}+1)}} \left[\frac{n}{2} + \frac{|x|^2}{4Dt} \right]$$

$$48 \quad \phi_{x_i x_i} = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}}{t^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}} \left[\frac{n}{2} + \frac{|x|^2}{4Dt} \right]$$

$\Rightarrow \phi(t, x)$ è sol. dell'eqz. del calore all'indietro

$$\phi_t + D \Delta \phi = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow (8) \quad v(t, x) \doteq \phi(T-t, x), \quad t \in [0, T[, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

soddisfa

$$v_t = -\phi_t, \quad v_{x_i x_i} = \phi_{x_i x_i}$$

è dunque sol. dell'eqz. del calore

$$v_t - D \Delta v = 0, \quad t \in [0, T[, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Poiché $w_\mu(t, x) = u(t, x) - \mu v(t, x)$

e u è sottosol. dell'eqz. del calore, ne deduciamo che anche w_μ è sottosol.

$$(w_\mu)_t - D \Delta w_\mu \leq 0 \quad \text{in } S_{T,r} =]0, T[\times B_r$$

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$$

Applicando il PM debole deduciamo che

$$(9) \quad \max_{\partial_{T,r}} w_\mu = \max_{\partial_p S_{T,r}} w_\mu$$

Passo 2: si noti che $\partial_p S_{T,r} = \{0\} \times \overline{B_r} \cup]0, T] \times \{x \in \mathbb{R}^n; |x|=r\}$

$$(10) \quad w_\mu(0, x) = u(0, x) - \mu r(0, x) < u(0, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$(11) \quad w_\mu(t, x) \underset{|x|=r}{\leq} u(t, x) - \frac{\mu}{(T-t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4D(T-t)}} \leq$$

$$\leq u(t, x) - \frac{\mu}{T^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4DT}} \leq$$

$$\underset{(2) \leq (5)}{\leq} c_1 e^{Q_1 r^2} - \frac{\mu}{T^{n/2}} e^{2Q_1 r^2}$$

$$= \left(c_1 - \frac{\mu}{T^{n/2}} e^{Q_1 r^2} \right) e^{Q_1 r^2}$$

Scegliendo r sufficientemente grande in modo che

$$\underbrace{\left(c_1 - \frac{\mu}{T^{n/2}} e^{Q_1 r^2} \right)}_{\underset{0}{\Lambda} \text{ (per } r \text{ suff. grande)}} e^{Q_1 r^2} \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u(0, x)$$

49

deduciamo da (10), (11) che

$$(12) \quad \max_{\partial_p S_{T,r}} w_\mu \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u(0, \cdot)$$

per ogni $\mu > 0$ e $\forall r > 0$ suff. grande (dipendente da μ)

Dalle disuguaglianze (9), (12), considerando il sup. su $r > 0$, deduciamo:

$$(13) \quad \sup_{S_T} w_\mu \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u(0, \cdot) \quad \forall \mu > 0$$

Questa disuguaglianza implica che, $\forall t \in [0, T]$ e $\forall r > 0$ si ha

$$(14) \quad \sup_{B_r} u(t, \cdot) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u(0, \cdot) + \mu C_{r,t} \quad \forall \mu > 0$$

per un'opportuna costante $C_{r,t} > 0$. Considerando il lim per $\mu \rightarrow 0$ in (14) si deduce

$$(15) \quad \sup_{B_r} u(t, \cdot) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u(0, \cdot) \quad \forall t \in [0, T], r > 0.$$

In fine, considerando l'estremo superiore in (15) per $r > 0$, $t \in [0, T]$, otteniamo l'uguaglianza (3).

Passo 3: per ottenere la conclusione del Teorema per un qualunque $T > 0$, si considerano sottointervalli ad esempio di lunghezza $T = \frac{1}{1600000000}$: $[iT, (i+1)T]$, $i \geq 0$, e si applica ripetutamente il risultato ottenuto ai Passi 1-2.

Lemma 1

Sia $u \in C_{t,x}^{1,2}(S_T) \cap C(\bar{S}_T)$, $S_T =]0, T[\times \mathbb{R}^n$ t.c.

$$(16) \quad |u(t, x)| \leq c e^{a|x|^2} \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n,$$

per qualche costante $c, a > 0$. Allora si ha:

$$(17) \quad \|u\|_{L^\infty(S_T)} \leq \|u(0, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + T \|u_t - D \Delta u\|_{L^\infty(S_T)}$$

Dim. Supponiamo $\alpha \doteq \|u(0, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty$,

$$\beta \doteq \|u_t - D \Delta u\|_{L^\infty(S_T)} < \infty,$$

altrimenti (16) è ovvia. Consideriamo

$$(18) \quad w_{\pm}(t, x) \doteq \alpha + t \beta \pm u(t, x)$$

50 / Si ha allora

$$\partial_t w_{\pm} - D \Delta w_{\pm} = \beta_{\pm} (\partial u - \Delta u) \geq 0$$

$$w_{\pm}(t, x) \geq -|u(t, x)| \geq -c e^{a|x|^2} \\ \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Applicando allora il Teorema 1 a $w_{\pm}(t, x)$ otteniamo

$$\inf_{S_T} w_{\pm} \geq \inf_{\mathbb{R}^n} w_{\pm}(0, \cdot) \geq 0$$

$$\Rightarrow w_{\pm}(t, x) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$$

e la stima (16) ne segue di conseguenza. $\square$

Corollario (stabilità e unicità)

Siano $u, v \in C_{t,x}^{1,2}(S_T) \cap C(\bar{S}_T)$, $S_T =]0, T[\times \mathbb{R}^n$ funzioni che soddisfanno la condizione (16) e siano soluzioni di

$$(19) \quad u_t - D \Delta u = f(t, x)$$

con dato iniziale, u_0, v_0 , rispettivamente.

Supponiamo $f \in C(\bar{S}_T)$, $u_0, v_0 \in C(\mathbb{R}^n)$.

Allora si ha:

i) Se $u_0 = v_0 \Rightarrow u = v$

ii) Se $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, vale la stima

$$\|u - v\|_{L^\infty(S_T)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Dim: consideriamo $w = u - v$

i) u, v sol. di (19) $\Rightarrow w$ sol. dell'eqz. del calore omogenea e dunque, applicando il Teorema 1 deduciamo

$$\|u - v\|_{L^\infty(\bar{S}_T)} = \|u(0, \cdot) - v(0, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$$

$\Rightarrow u = v$ essendo entrambe continue

ii) u, v soddisfano (16), (19) $\Rightarrow w$ soddisfa (16) ed è sol. dell'eqz. omogenea del calore.

Allora, applicando il Lemma 1 si deduce

$$\|w\|_{L^\infty(S_T)} \leq \|w(0, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad \blacksquare$$

Esercizi Equazione del Calore

Ex 1: Problema misto con condizioni al
borolo di Neumann.

Pb 1: Siano $D > 0$ e $g \in C^1([0, \pi])$ t.c. $g'(0) = g'(\pi) = 0$

i) Usare il metodo di separazione delle variab. per determinare la sol. del pb.

$$(1) \quad \begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 & x \in]0, \pi[, t > 0 \\ u(0, x) = g(x) & x \in [0, \pi] \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

ii) Analizzare unicità e stabilità in L^2 della sol. rispetto alla condiz. iniziale g .

iii) Determinare le sol. stazionarie di

$$(2) \quad \begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 & x \in]0, \pi[, t > 0 \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

e studiare il comportamento asintotico per $t \rightarrow \infty$ della sol. di (1), stabilendo se si ottiene una sol. stazionaria di (2).

Pb 2 : i) Usare il metodo di separazione delle variabili per risolvere il problema

$$(3) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in]0, \pi[, t > 0 \\ u(0, x) = 0 & x \in [0, \pi] \\ u_x(t, 0) = 0 & t > 0 \\ u_x(t, \pi) = U_L & t > 0 \end{cases}$$

ii) Studiare il comportamento asintotico per $t \rightarrow \infty$ della sol. di (3), determinando se si ottiene una sol. stazionaria, al variare di $U_L \in \mathbb{R}$.

Principio di Massimo

Pb 1 Sia $u \in C(\bar{S}) \cap C_{t,x}^{1,2}(S)$, $S =]0, +\infty[\times]0, 1[$

sol. del pb misto con condizioni al bordo di

Dirichlet

$$(1) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (x \in]0, 1[, t > 0) \\ u(0, x) = \sin \pi x, & x \in [0, 1] \\ u(t, 0) = 2te^{1-t}, & t > 0 \\ u(t, 1) = 1 - \cos(\pi t), & t > 0 \end{cases}$$

i) Mostrare che $u(t, x) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in \bar{S}$,

ii) Determinare una limitazione superiore

di $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $u(3, \frac{1}{2})$.

Pb 2 Sia $u \in C(\bar{S}) \cap C_{t,x}^{1,2}(S)$, $S =]0, +\infty[\times]0, 1[$

sol. del pb misto

$$(2) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & t > 0, x \in]0, 1[\\ u(0, x) = x(1-x), & x \in [0, 1] \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

i) Mostrare che $u(t, x) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in \bar{S}$

ii) Determinare $\alpha, \beta > 0$ t.c.

$$u(t, x) \leq \alpha x(1-x)e^{-\beta t} \quad \forall (t, x) \in \bar{S}$$

e dedurre che $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$ uniform su $[0, 1]$

pb₂: Si consideri il pb misto

$$(3) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 1, & t > 0, x \in]0, 1[\\ u(0, x) = 0 & x \in]0, 1[\\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

i) Determinare la sol. stazionaria $u^s(x)$ di

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 1, & t > 0, x \in]0, 1[\\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

ii) Sia $u \in C(\bar{S}) \cap C_{t,x}^{1,2}(S)$, $S =]0, +\infty[\times]0, 1[$ sol. di (3). Mostrare che

$$u(t, x) \leq u^s(x) \quad \forall (t, x) \in S$$

iii) Determinare $\beta > 0$ t.c.

$$u(t, x) \geq (1 - e^{-\beta t}) u^s(x) \quad \forall (t, x) \in S$$

iv) Dedurre che $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = u^s(x)$ unif. su $[0, 1]$

v) Determinare la sol. di (3) col metodo di separazione delle variabili e controllare che soddisfa i)-iv)

Metodo di riflessione per la determinazione di una soluzione.

Pb 1: Sia $g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata.

i) Determinare una sol. del pb misto con condizioni al bordo di Dirichlet

$$(1) \begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 & t > 0, x > 0 \\ u(0, x) = g(x) & x > 0 \\ u(t, 0) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

estendendo in modo dispari la funzione g ed utilizzando la formula di rappresentazione della sol. del Pb di Cauchy su $\mathbb{R}$.

ii) Determinare una sol. del pb. misto con condizioni al bordo di Neumann

$$(2) \begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 & t > 0, x > 0 \\ u(0, x) = g(x) & x > 0 \\ u_x(t, 0) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

estendendo il dato iniziale in modo pari
ed utilizzando la formula di rappresentazione
della soluzione del Pb di Cauchy globale su $\mathbb{R}$.

iii) Mostrare che le sol. trovate ai punti i), ii)
forniscono l'unica soluzione limitata nei
due problemi.

Pb 2: Adattando il metodo di riflessione utilizzato
nel pb. precedente determinare una soluzione
del pb misto con condizioni al bordo di Neumann

$$(3) \quad \begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 & t > 0, x \in]0, L[\\ u(0, x) = g(x) & x \in [0, L] \\ u_x(t, 0) = u_x(t, L) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

supponendo $g: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

(dopo aver esteso g in modo pari, prolungarla
su tutto $\mathbb{R}$ come funzione periodica di periodo $2L$)

Pb 3: Adattando il metodo di riflessione dei problemi precedenti, determinare una soluzione del problema misto con condizioni al bordo di Dirichlet

$$(4) \begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 & t > 0, x \in]0, L[\\ u(0, x) = g(x) & x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

supponendo $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e t.c. $g(0) = g(L) = 0$
 (dopo aver esteso g in modo dispari su $[-L, 0]$,
 prolungarla su tutto $\mathbb{R}$ come funzione periodica
 di periodo $2L$).