Introduzione alle Equazioni alle Derivate Parziali, L.M. in Matematica, A.A. 2013-2014.

Esercizi sull'equazione delle onde. .

Esercizio 1. (1) Considerare l'equazione alle derivate parziali

$$(E) \qquad u_{tt} + 3u_{tx} - 4u_{xx} = 0 \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T).$$

Determinare il tipo dell'operatore differenziale in (E) (ellittico, parabolico, iperbolico).

(2) Determinare una soluzione del problema di Cauchy

$$(C) \begin{cases} u_{tt} + 3u_{tx} - 4u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \times (0,+\infty). \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con $g \in C^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2 (Equipartizione dell'energia)**.** Sia $u \in \mathcal{C}^2$ la soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

con u_0, v_0 funzioni regolari con supporto contenuto nell'intervallo $(-k,k)$, $k > 0$. Sia

$$k(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t^2(x,t)dx$$

l'energia cinetica e

$$p(t) = \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)dx$$

l'energia potenziale.

(i) Mostrare che $u(x,t) = 0$ per $(x,t) \in \{|x| > k + ct\}$.
(ii) Mostrare che $k(t) + p(t)$ è costante per ogni t.
(iii) Mostrare che esiste $T > 0$ tale che $k(t) = p(t)$ per $t \geq T$.

Suggerimento per (iii): calcolare esplicitamente con la formula di d'Alembert $u_t^2 - c^2 u_x^2$ e mostrare che $u_t^2 - c^2 u_x^2 = 0$ per $x \in \mathbb{R}$ e $t > k/c$.

Esercizio 3. Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty)$ la soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) = v_0(x) & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

con u_0, v_0 funzioni regolari con supporto contenuto in $B(0,r)$.

Mostrare che per ogni t fissato la mappa

$$x \longrightarrow u(x,t)$$

ha supporto compatto contenuto nell'anello

$$(t-r)^+ \leq |x| \leq r + t$$

dove $(t-r)^+ = \max(0, t-r)$.

Esercizio 4. Determinare la soluzione $u \in C^2([0,+\infty) \times [0,+\infty))$ del problema di Cauchy-Dirichlet

$$(W)\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \log(1+x^4) & x \geq 0 \\ u_t(x,0) = 0 & x \geq 0. \end{cases}$$

Studiare il comportamento della soluzione per $t \to +\infty$.