PRIMA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2002/2003, 29 Ottobre 2002

d32275

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

1	2	3
D	C	A

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 4 vale 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Sia $\{a_n\}_n$ una successione infinitesima definitivamente non nulla. Si ha:

A Se $\{a_n\}_n$ è definitivamente positiva, allora la successione $\left\{\frac{\sin a_n^2}{a_n^3}\right\}_n$ è infinitesima.

B La successione $\left\{\frac{\sin a_n^2}{a_n^3}\right\}_n$ è divergente a $+\infty$.

C La successione $\left\{\frac{\sin a_n^2}{a_n^3}\right\}_n$ è convergente a 1.

☒ D Se $a_n > 0$ per $n \in \{k^2 \ : \ k \in \mathbb{N}\}$, ed $a_n < 0$ per $n \in \mathbb{N} \setminus \{k^2 \ : \ k \in \mathbb{N}\}$, allora $\left\{\frac{\sin a_n^2}{a_n^3}\right\}_n$ è indeterminata.

ESERCIZIO 2. Le radici cubiche di $8i$ sono:

A $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \qquad 2i.$

B $\sqrt{3} + i, \qquad \sqrt{3} - i, \qquad -2i.$

☒ C $\sqrt{3} + i, \qquad -\sqrt{3} + i, \qquad -2i.$

D $1 + \sqrt{3}\,i, \qquad -1 + \sqrt{3}\,i, \qquad -2i.$

ESERCIZIO 3. Fissati $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha + \beta & \text{se} \quad x \in]-1,\, 0[\cup]0,\, 1[\,, \\ \operatorname{sgn}(x) & \text{se} \quad x \in]-\infty,\, -1] \;\cup\; [1,\, +\infty[\,. \end{cases}$$

Si ha:

- [X] Esistono infinite coppie di α, β per cui f è continua.
- [B] La funzione f non è continua per qualunque scelta di α, β.
- [C] La funzione f è continua per tutte e sole le coppie della forma $(\alpha,\, 0)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.
- [D] Esiste una e una sola coppia di α, β per cui f è continua.

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \dfrac{x^2 - 4 + \operatorname{sgn}(2-x)}{x^2 - 4x + 3}$.

(i) Determinare il dominio naturale e l'immagine di f:

$$\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1,\, 3\}\,, \qquad \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}\,.$$

(ii) Determinare eventuali interesezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x: \qquad x = - \pm \sqrt{3}\,, \qquad x = 2\,, \qquad x = \sqrt{5}\,.$$

$$\text{asse } y: \quad y = -1\,.$$

(iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} =]-\infty,\, -\sqrt{3}] \cup]1,\, \sqrt{3}] \;\cup\; [2,\, \sqrt{5}] \cup]3,\, +\infty[\,.$$

(iv) Determinare eventuali punti di discontinuità a salto.

Punto di discontinuità a salto: $\quad x = 2\,.$

(v) Determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Asintoti verticali (bilateri): $\quad x = 1, \quad x = 3\,.$

Asintoto orizzontale (bilatero): $\quad y = 1\,.$

Non ci sono asintoti obliqui.

(vi) Tracciare il grafico probabile della funzione.