

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2002/2003, 19 Dicembre 2002

d32139

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
B	A	D	B	C	C

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Calcolare (se esiste) il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(\cos x) + \sin^2 x}{x^4}.$$

(Si ricordi lo sviluppo asintotico $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n)$, per $x \rightarrow 0$).
Si ha:

- ☐ A $\ell = 0$.
- ☒ B $\ell = -\frac{1}{2}$.
- ☐ C $\ell = +\infty$.
- ☐ D Il limite ℓ non esiste.

ESERCIZIO 2. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_\alpha(x) = e^x + x + \alpha$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☒ A Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f_α ha un solo zero in $\mathbb{R}$.
- ☐ B Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione f_α non ha zeri in $\mathbb{R}$.
- ☐ C Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione f_α ha almeno due zeri in $\mathbb{R}$.
- ☐ D Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f_α non ha zeri nell'intervallo $] -\infty, 0]$.

ESERCIZIO 3. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x \left(\sin \frac{1}{x} \right)^\alpha & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ **A** Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $x_0 = 0$ è un punto critico di f_α .
- ☐ **B** Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0} f'_\alpha(x) = 0$.
- ☐ **C** Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$ non esiste un intorno di $x_0 = 0$ in cui f_α è crescente.
- ☒ **D** Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione $f(x) = \int_0^x \ln |1+t| dt$, $x \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ **A** f non è derivabile in $x = 0$.
- ☒ **B** f è derivabile in $x = 0$, e $f'(0) = 0$.
- ☐ **C** f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, e $f'(x) = \frac{\ln |1+x|}{1+x}$.
- ☐ **D** f non è derivabile in $x = -2$.

ESERCIZIO 5. Si consideri l'equazione

$$(E) \quad z^2 - 3|z| + 4 = 0.$$

Si ha:

- ☐ **A** (E) ha quattro soluzioni.
- ☐ **B** Le soluzioni di (E) sono due numeri reali che hanno lo stesso modulo.
- ☒ **C** Le soluzioni di (E) sono due numeri puramente immaginari che hanno lo stesso modulo.
- ☐ **D** Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 6. Sia $x \mapsto \varphi(x; c)$, $x > 0$, ($c \in \mathbb{R}$) l'integrale generale dell'equazione

$$\dot{y} + y = -\frac{e^{-x}}{x^2}, \quad x > 0,$$

e si consideri il limite $\ell(c) \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cdot \varphi(x; c)$. Allora si ha:

- ☐ **A** Non esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = 0$.
- ☐ **B** Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = +\infty$.
- ☒ **C** Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = 1$.
- ☐ **D** Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \frac{\sqrt{2 \cos^2 x - \sin x - 1}}{3x^2 - 11x - 4}$.

(i) Determinare il dominio naturale di f :

$$\text{Dom}(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right] \setminus \left\{ -\frac{1}{3}, 4 \right\}.$$

(ii) Determinare eventuali intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x: \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{asse } y: \quad y = -\frac{1}{4}.$$

(iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} = \text{Dom}(f) \cap \left(] -\infty, -1/3] \cup [4, +\infty[\right).$$

(iv) Determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

$$\text{Asintoti verticali (bilateri):} \quad x = -\frac{1}{3}, \quad x = 4.$$

$$\text{Asintoto orizzontale (bilatero):} \quad y = 0.$$

Non ci sono asintoti obliqui.

(v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

(vi) Tracciare il grafico probabile della restrizione della funzione f all'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = x e^{\frac{1}{\ln x}}$.

(i) Determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Asintoto verticale (unilatero): $x = 1$.

Non ci sono asintoti orizzontali od obliqui.

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona crescente su: $]0, e^{-1}]$ e su $[e, +\infty[$.

Monotona decrescente su: $[e^{-1}, 1[$ e su $]1, e]$.

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

Punto di minimo relativo: $x = e$.

Punto di massimo relativo: $x = e^{-1}$.

Non esistono punti di massimo o minimo assoluto.

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa ed in quali intervalli è concava.

Convessa su: $[e^{(1-\sqrt{2})}, 1[$ e su $]1, e^{(1+\sqrt{2})}]$.

Concava su: $]0, e^{(1-\sqrt{2})}]$ e su $[e^{(1+\sqrt{2})}, +\infty[$.

(v) Determinare eventuali punti di flesso di f .

Punti di flesso: $x = e^{(1-\sqrt{2})}$, $x = e^{(1+\sqrt{2})}$.

(vi) Tracciare il grafico probabile della funzione.