

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2002/2003, 19 Dicembre 2002

d54137

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
B	D	D	A	C	C

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Si consideri l'equazione

$$(E) \quad z^2 + 2|z| - 3 = 0.$$

Si ha:

- ☐ A Le soluzioni di (E) sono due numeri puramente immaginari che hanno lo stesso modulo.
- ☒ B Le soluzioni di (E) sono due numeri reali che hanno lo stesso modulo.
- ☐ C (E) ha quattro soluzioni.
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 2. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_\alpha(x) = \ln x + x + \alpha$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione f_α non ha zeri in $]0, +\infty[$.
- ☐ B Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f_α non ha zeri nell'intervallo $]0, 1[$.
- ☐ C Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione f_α ha almeno due zeri in $]0, +\infty[$.
- ☒ D Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f_α ha un solo zero nell'intervallo $]0, +\infty[$.

ESERCIZIO 3. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^\alpha} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ non è punto di massimo o di minimo relativo di f_α .
- ☐ B Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\lim_{x \rightarrow 0} f'_\alpha(x) \neq 0$.
- ☐ C Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f_α non è derivabile in $x_0 = 0$.
- ☒ D Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ è un punto critico di f_α .

ESERCIZIO 4. Sia $x \mapsto \varphi(x; c)$, $x \in \mathbb{R}$, ($c \in \mathbb{R}$) l'integrale generale dell'equazione

$$\dot{y} - 2y = \frac{e^{2x}}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

e si consideri il limite $\ell(c) \doteq \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} \cdot \varphi(x; c)$. Allora si ha:

- ☒ A Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = 0$.
- ☐ B Non esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = \pi$.
- ☐ C Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = +\infty$.
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 5. Calcolare (se esiste) il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cosh x} - 1 - \frac{\tan^2 x}{4}}{x^4}.$$

(Si ricordi lo sviluppo asintotico $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)x^n}{n!} + o(x^n)$, per $x \rightarrow 0$). Si ha:

- ☐ A $\ell = 0$.
- ☐ B $\ell = +\infty$.
- ☒ C $\ell = -\frac{17}{96}$.
- ☐ D Il limite ℓ non esiste.

ESERCIZIO 6. Si consideri la funzione $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+|t|}$, $x \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$, e $f'(x) = -\frac{\operatorname{sgn}(x)}{(1+|x|)^2}$.
- ☐ B f è derivabile in $x = 0$, e $f'(0) = 0$.
- ☒ C f è derivabile in $x = 0$, e $f'(0) = 1$.
- ☐ D f non è derivabile in $x = 0$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \frac{\sqrt{2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3}}{2x^2 - 13x + 6}$.

(i) Determinare il dominio naturale di f :

$$\text{Dom}(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right] \setminus \left\{ \frac{1}{2}, 6 \right\}.$$

(ii) Determinare eventuali intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x : \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{asse } y : \quad y = 0.$$

(iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} = \text{Dom}(f) \cap \left(] -\infty, 1/2] \cup [6, +\infty[\right).$$

(iv) Determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

$$\text{Asintoti verticali (bilateri):} \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 6.$$

$$\text{Asintoto orizzontale (bilatero):} \quad y = 0.$$

Non ci sono asintoti obliqui.

(v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

(vi) Tracciare il grafico probabile della restrizione della funzione f all'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$.

- (i) Determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Asintoto verticale (bilatero): $x = e^{-1}$.

Non ci sono asintoti orizzontali od obliqui.

- (ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona crescente su: $]0, e^{-1}]$ e su $[e^{-1}, +\infty[$.

Non è monotona decrescente in alcun intervallo.

- (iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f , e determinare l'immagine di f .

Non esistono punti di massimo o minimo relativo (né assoluto).

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

- (iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa ed in quali intervalli è concava.

Convessa su: $]0, e^{-1}[$ e su $[e, +\infty[$.

Concava su: $]e^{-1}, e]$.

- (v) Determinare eventuali punti di flesso di f .

Punto di flesso: $x = e$.

- (vi) Tracciare il grafico probabile della funzione.