II APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2002/2003, 8 Gennaio 2003

d32139

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

1	2	3	4	5	6
A	C	C	D	D	A

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare il limite della successione

$$\ell(\alpha) \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{e^{3n}}{\sqrt{e^n} - \sqrt{e^n + e^{\alpha n}}}\,.$$

Si ha:

$\boxed{\text{X}}$ $\ell(\alpha) = 0 \qquad \forall\, \alpha > 6\,.$

$\boxed{\text{B}}$ $\ell(\alpha) = -\infty \qquad \forall\, \alpha \leq 6\,.$

$\boxed{\text{C}}$ $\ell(\alpha) = 0 \qquad \forall\, \alpha > 3\,.$

$\boxed{\text{D}}$ $\ell(6) = 1\,.$

ESERCIZIO 2. Fissati $\alpha > 0\,,\ \beta \in \mathbb{R},$ si consideri la funzione $f_{\alpha,\beta} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se} \quad x \geq \alpha\,, \\ \dfrac{x}{2} + \beta & \text{se} \quad x < \alpha\,. \end{cases}$$

Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ Per qualunque $\alpha > 0$, esiste $\beta \in \mathbb{R}$ per cui $f_{\alpha,\beta}$ è continua e derivabile.

$\boxed{\text{B}}$ Esistono $\alpha > 0\,, \beta > 0$, tali che $f_{\alpha,\beta}$ è continua e derivabile.

$\boxed{\text{X}}$ Esistono $\alpha > 0\,, \beta < 0$, tali che $f_{\alpha,\beta}$ è continua e derivabile.

$\boxed{\text{D}}$ Per qualunque $\beta \in \mathbb{R}$, esiste $\alpha > 0$ per cui $f_{\alpha,\beta}$ è continua e derivabile.

ESERCIZIO 3. Calcolare il valore dell'integrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos^2 x}\, dx$.

$\boxed{\text{A}}$ $I = \dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ $I = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$\boxed{\times}$ $I = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$\boxed{\text{D}}$ Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 4. Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile, stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ Se x_0 è un punto di massimo per f, allora $f'(x_0) = 0$.

$\boxed{\text{B}}$ Se $f'(0) = 0$, allora x_0 è un punto di estremo per f.

$\boxed{\text{C}}$ Se f' si annulla in infiniti punti, allora f non può essere strettamente crescente.

$\boxed{\times}$ Se x_0 è un punto di flesso per f, allora x_0 è un punto di estremo per f'.

ESERCIZIO 5. Calcolare il modulo e un argomento del numero complesso $z = \dfrac{i\,(i-\sqrt{3})^6}{1-i}$.

$\boxed{\text{A}}$ $|z| = 2^5$, $\arg(z) = \frac{5\pi}{4}$.

$\boxed{\text{B}}$ $|z| = 2^{\frac{11}{2}}$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$.

$\boxed{\text{C}}$ $|z| = 2^{\frac{11}{2}}$, $\arg(z) = 2\pi$.

$\boxed{\times}$ $|z| = 2^{\frac{11}{2}}$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$.

ESERCIZIO 6. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x > -1$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{(x-1)\,y}{x+1} + x\,, & x > -1\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Determinare l'insieme $F \doteq \left\{\alpha \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x}\varphi(x) \text{ esiste finito } \right\}$.

$\boxed{\times}$ $F =]-\infty, -1]$.

$\boxed{\text{B}}$ $F = [1, +\infty[$.

$\boxed{\text{C}}$ $F = \{-1\}$.

$\boxed{\text{D}}$ Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{|2x+1|}{x-3}\right)$.

(i) Determinare il dominio naturale di f:

$$\mathrm{Dom}(f) = [-4,\ 2/3]\,.$$

(ii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} = \{-1/2\}\,.$$

(iii) Determinare eventuali punti singolari di f (specificandone la natura).

$$x = -1/2 \quad \text{è punto angoloso}\,.$$

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona crescente su: $\quad [-1/2,\ 2/3]\,.$

Monotona decrescente su: $\quad [-4,\ -1/2]\,.$

(v) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f:

Punti di minimo assoluto: $\quad x = -4, \quad x = 2/3\,.$

Punto di massimo assoluto: $\quad x = -1/2\,.$

(vi) Determinare l'immagine di f:

$$\mathrm{Im}(f) = [-\pi/2,\ 0]\,.$$

(vii) Tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \displaystyle\int_1^{\sin x} e^{t^2}\, dt.$

(i) Determinare il dominio e l'insieme di positività della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\,.$$

$$\{f \geq 0\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona crescente su ogni intervallo: $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right],\quad k \in \mathbb{Z}.$

Monotona decrescente su ogni intervallo: $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right],\quad k \in \mathbb{Z}.$

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto della restrizione della funzione f all'intervallo $[0,\, 2\pi]$.

Punto di minimo assoluto: $x = \dfrac{3\pi}{2}\,.$

Punto di massimo assoluto: $x = \dfrac{\pi}{2}\,.$

(iv) Stabilire in quali intervalli la restrizione della funzione f all'intervallo $[0,\, 2\pi]$ è convessa ed in quali intervalli è concava.

Convessa su: $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right],\quad \left[\dfrac{3\pi}{4},\ \pi\right],\quad \left[\dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}\right].$

Concava su: $\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}\right],\quad \left[\pi,\ \dfrac{5\pi}{4}\right],\quad \left[\dfrac{7\pi}{4},\ 2\pi\right].$

(v) Determinare eventuali punti di flesso della restrizione della funzione f all'intervallo $[0,\, 2\pi]$.

Punti di flesso: $x = \dfrac{\pi}{4}\,,\quad x = \dfrac{3\pi}{4}\,,\quad x = \pi\,,\quad x = \dfrac{5\pi}{4}\,,\quad x = \dfrac{7\pi}{4}\,.$

(vi) Tracciare il grafico probabile della restrizione della funzione f all'intervallo $[0,\, 2\pi]$.