# II APPELLO DI
# ANALISI MATEMATICA LA

## Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: Fabio Ancona)

### A.A. 2002/2003, 8 Gennaio 2003

d71129

Cognome e Nome: ..........................................................................

Matricola: .........................................

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | C | B | D | B | A |

**N.B.** *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.*

**ESERCIZIO 1.** Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

~~A~~ Se $f$ è derivabile, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $y \in ]x, x+1[$ tale che $f'(y) = f(x+1) - f(x)$.

B Se $f$ è derivabile due volte e strettamente convessa, allora $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

C Se $f$ è derivabile, allora anche $|f|$ è derivabile.

D Se $|f|$ è periodica, allora anche $f$ è periodica.

**ESERCIZIO 2.** Calcolare il modulo e un argomento del numero complesso $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{i^3\,(i-1)^7}$.

A $|z| = 2^{-3}$, $\arg(z) = \frac{5\pi}{12}$.

B $|z| = -2^{-\frac{5}{2}}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{12}$.

~~C~~ $|z| = 2^{-\frac{5}{2}}$, $\arg(z) = -\frac{61\pi}{12}$.

D $|z| = 2^{-\frac{5}{2}}$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{12}$.

**ESERCIZIO 3.** Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x < 1$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{(x+1)\,y}{1-x} + x\,, & x < 1\,, \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Determinare l'insieme $F \doteq \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{x \to -\infty} e^{\alpha x} \varphi(x) \quad \text{esiste finito} \right\}$.

A $F = \mathbb{R}$.

☒ $F = [1, +\infty[$.

C $F = ]1, +\infty[$.

D Nessuna delle altre risposte è corretta.

**ESERCIZIO 4.** Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare il limite della successione

$$\ell(\alpha) \doteq \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n + n^\alpha} - \sqrt{n}}{n^2}\,.$$

Si ha:

A $\ell(\alpha) = 0 \qquad \forall\, \alpha \leq 4$.

B $\ell(4) = 2$.

C $\ell(\alpha) = +\infty \qquad \forall\, \alpha > 2$.

☒ $\ell(\alpha) = +\infty \qquad \forall\, \alpha > 4$.

**ESERCIZIO 5.** Fissati $\alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x \geq \alpha\,, \\ 2x + \beta & \text{se} \quad x < \alpha\,. \end{cases}$$

Si ha:

A Per qualunque $\beta \in \mathbb{R}$, esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $f_{\alpha,\beta}$ è continua e derivabile.

☒ Esistono $\alpha > 0\,, \beta > 0$, tali che $f_{\alpha,\beta}$ è continua e derivabile.

C Esistono $\alpha > 0\,, \beta < 0$, tali che $f_{\alpha,\beta}$ è continua e derivabile.

D Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, esiste $\beta \in \mathbb{R}$ per cui $f_{\alpha,\beta}$ è continua e derivabile.

**ESERCIZIO 6.** Calcolare il valore dell'integrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + \frac{1}{2}}\,dx$.

☒ $I = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

B $I = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

C $I = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$.

D Nessuna delle altre risposte è corretta.

**ESERCIZIO 7.** Si consideri la funzione definita da $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\left(\dfrac{|1+5x|}{3x+7}\right)$.

(i) Determinare il dominio naturale di $f$:

$$\mathrm{Dom}(f) = [-1,\ 3]\,.$$

(ii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} = [-1,\ 3]\,.$$

(iii) Determinare eventuali punti singolari di $f$ (specificandone la natura).

$$x = -1/5 \quad \text{è punto angoloso}\,.$$

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$$\text{Monotona crescente su:} \qquad [-1/5,\ 3]\,.$$

$$\text{Monotona decrescente su:} \qquad [-1,\ -1/5]\,.$$

(v) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di $f$:

$$\text{Punt0 di minimo assoluto:} \qquad x = -1/5\,.$$

$$\text{Punti di massimo assoluto:} \qquad x = -1, \quad x = 3\,.$$

(vi) Determinare l'immagine di $f$:

$$\mathrm{Im}(f) = [0,\ \pi/2]\,.$$

(vii) Tracciare il grafico probabile della funzione.

**ESERCIZIO 8.** Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_{\sin x}^{2} \sqrt{1+e^{t^2}}\, dt.$

(i) Determinare il dominio e l'insieme di positività della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\{f \geq 0\} = \mathbb{R}.$$

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione crescente, ed in quali intervalli

è monotona decrescente.

Monotona crescente su ogni intervallo: $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right],\quad k \in \mathbb{Z}.$

Monotona decrescente su ogni intervallo: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right],\quad k \in \mathbb{Z}.$

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto della restrizione della funzione $f$ all'intervallo $[0,\ 2\pi]$.

Punto di minimo assoluto: $x = \frac{\pi}{2}.$

Punto di massimo assoluto: $x = \frac{3\pi}{2}.$

(iv) Stabilire in quali intervalli la restrizione della funzione $f$ all'intervallo $[0,\ 2\pi]$ è convessa ed in quali intervalli è concava.

Convessa su: $[0,\ \pi].$

Concava su: $[\pi,\ 2\pi].$

(v) Determinare eventuali punti di flesso della restrizione della funzione $f$ all'intervallo $[0,\ 2\pi]$.

Punto di flesso: $x = \pi.$

(vi) Tracciare il grafico probabile della restrizione della funzione $f$ all'intervallo $[0,\ 2\pi]$.