

PRIMA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2002/2003, 17 febbraio 2003

d31215

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3
B	A	D

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 4 vale 8 punti.

ESERCIZIO 1. Fissato $\alpha > 0$, si consideri la curva γ_α di equazione $x(t) = -e^t$, $y(t) = t e^{-t}$, $t \in [0, \alpha]$, e si calcoli l'integrale curvilineo (di prima specie) $I(\alpha) \doteq \int_{\gamma_\alpha} x \sqrt{x^4 + (1 + xy)^2} ds$.

Si ha:

☐ $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{I(\alpha)}{\alpha} = -2.$

☒ $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{I(\alpha)}{\alpha} = -2.$

☐ $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{I(\alpha)}{\alpha} = 0.$

☐ Esiste $\alpha > 0$ tale che $I(\alpha) > 0$.

ESERCIZIO 2. Data una funzione $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, con derivate seconde ovunque diverse da zero ($f_{xx}(x, y) \neq 0$, $f_{xy}(x, y) \neq 0$, $f_{yy} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$), si consideri la funzione $g: [0, \infty[\times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

☒ $g_{\theta\theta}(\rho, \frac{\pi}{2}) = \rho^2 f_{xx}(0, \rho) - \rho f_y(0, \rho) \quad \forall \rho \geq 0.$

☐ $g_{\theta\theta}(\rho, 0) = \rho^2 f_{xx}(\rho, 0) \quad \forall \rho \geq 0.$

☐ $g_{\theta\theta}(\rho, \frac{\pi}{2}) = \rho^2 f_{yy}(0, \rho) \quad \forall \rho \geq 0.$

☐ $g_{\theta\theta}(0, 0) \neq 0.$

ESERCIZIO 3. Determinare l'area (orientata) A della regione delimitata dalla curva parametrica chiusa di equazione $x(t) = 6 \cos t + 3 \cos(2t)$, $y(t) = 6 \sin t - 3 \sin(2t)$, $t \in [0, 2\pi]$. (Può essere utile ricordare le formule trigonometriche di bisezione: $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$, $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$).

- ☐ A $A = 9$.
- ☐ B $A = 9\pi$.
- ☐ C $A = 36\pi$.
- ☒ D Nessuna delle altre risposte è corretta.
-

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - 7xy$.

- (i) Determinare il dominio naturale di f :

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2.$$

- (ii) Determinare eventuali punti critici di f e studiarne la natura.

$(0, 0)$ è l'unico punto critico, ed è un punto di sella.

- (iii) L'immagine $f(\mathbb{R}^2)$ è:

$$f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}.$$

- (iv) Si consideri la restrizione di f al cerchio unitario $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e se ne determini l'immagine

$$f(C) = \left[\ln 2 - \frac{7}{2}, \ln 2 + \frac{7}{2} \right].$$