

SECONDA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 15 Dicembre 2003

a21264

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3
C	A	C

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 4 vale 8 punti.

ESERCIZIO 1. Calcolare il valore dell'integrale $I = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 + \cos x}{(x + \sin x)^2} dx$.

☐ A $I = 0$.

☐ B $I = -\frac{1}{\pi}$.

☒ C $I = \frac{1}{2\pi}$.

☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 2. Per ogni fissato $\alpha \geq 0$, si consideri la funzione $f_{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

☒ A Per qualunque $\alpha > 0$ la funzione f_{α} ha un punto critico nell'intervallo $]0, 1/\pi[$.

☐ B Esiste $\alpha \in [0, 1]$ per cui la funzione f_{α} ha un punto critico in $x_0 = 0$.

☐ C Esiste $\alpha \in [1, 2]$ per cui si ha $\lim_{x \rightarrow 0} f'_{\alpha}(x) = 0$.

☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 3. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x; \alpha)$, $|x| < 1$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{(y-2)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x; \alpha)$. Si ha:

☐ **A** Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il limite $\ell(\alpha)$ non esiste.

☐ **B** Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = +\infty$.

☒ **C** Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = 2$.

☐ **D** Non esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = 0$.

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_0^{3x^2+x^3} \frac{1+2e^{-t}}{3+e^{-t}} dt$.

(i) Determinare il dominio e l'insieme di positività della funzione.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\{f \geq 0\} = [-3, +\infty[.$$

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = (6x + 3x^2) \frac{1 + 2e^{-(3x^2+x^3)}}{3 + e^{-(3x^2+x^3)}}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strettamente crescente su: $]-\infty, -2]$ e su $[0, +\infty[$.

Monotona strettamente decrescente su: $[-2, 0]$.

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

Punto di minimo relativo: $x = 0$.

Punto di massimo relativo: $x = -2$.

- (iv) Osservando che $\frac{1+2e^{-t}}{3+e^{-t}} \geq \frac{1}{3}$ per ogni t , e confrontando $f(x)$ con $\int_0^{3x^2+x^3} \frac{dt}{3}$,
calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

- (v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.