I APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2003/2004, 15 Dicembre 2003

c65729

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

1	2	3	4	5	6
C	D	C	B	A	B

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Calcolare (se esiste) il limite

$$\ell \doteq \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x + 2(\cos x - 1)}{x^4}.$$

Si ha:

A $\ell = \dfrac{7}{12}$.

B $\ell = 0$.

☒ $\ell = \dfrac{3}{4}$.

D Il limite ℓ non esiste.

ESERCIZIO 2. Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

A Se f è dispari allora f ha almeno due zeri.

B Se f è pari allora f ha almeno uno zero.

C Se f è dispari ed esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora f ha almeno due zeri.

☒ Se f è pari ed esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora f ha almeno due zeri.

ESERCIZIO 3. Per ogni fissato $\alpha \geq 0$, si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x > 0\,, \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0\,. \end{cases}$$

Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

A Esiste $\alpha \in [0,1]$ per cui la funzione f_α ha un punto critico in $x_0 = 0$.

B Esiste $\alpha \in [1,2]$ per cui si ha $\lim_{x\to 0} f'_\alpha(x) = 0$.

~~C~~ Per qualunque $\alpha > 0$ la funzione f_α ha un punto critico nell'intervallo $]0,\, 1/\pi[$.

D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 4. Calcolare il valore dell'integrale $I = \displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^2}\, dx$.

A $I = -\dfrac{1}{\pi}$.

~~B~~ $I = \dfrac{1}{2\pi}$.

C $I = 0$.

D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 5. Siano z_0, z_1, z_2, z_3 le quattro radici quartiche di $1+i$. Si ha:

~~A~~ $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

B $|z_0| + |z_1| + |z_2| + |z_3| = 4\sqrt{2}$.

C $|z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3| = 2$.

D $(z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)^2 = 2$.

ESERCIZIO 6. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x;\, \alpha)$, $|x| < 1$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{(y-2)}{\sqrt{1-x^2}}\,, \\ y(0) = \alpha\,, \end{cases}$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x\to 1^-} \varphi(x;\, \alpha)$. Si ha:

A Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = +\infty$.

~~B~~ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = 2$.

C Non esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = 0$.

D Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il limite $\ell(\alpha)$ non esiste.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x - 14}{\sqrt{3x^2 - 16x + 5}}$.

(i) Determinare il dominio naturale di f:

$$\mathrm{Dom}(f) = \Big]-\infty,\, \frac{1}{3}\Big[\cup \Big]5,\, +\infty\Big[.$$

(ii) Determinare eventuali interesezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x: \qquad x = -2,\ 7.$$

$$\text{asse } y: \qquad y = -\frac{14}{\sqrt{5}}.$$

(iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} =]-\infty,\, -2] \cup [7,\, +\infty[.$$

(iv) Determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui (nel caso della presenza di asintoti obliqui è sufficiente determinarne il coefficiente angolare).

Asintoti verticali (unilateri): $x = \dfrac{1}{3}, \quad x = 5\,.$

Asintoti obliqui (unilateri): $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{7}{3\sqrt{3}}$ for $x \to +\infty\,.$

$y = -\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{7}{3\sqrt{3}}$ for $x \to -\infty\,.$

Non ci sono asintoti orizzontali.

(v) Determinare l'immagine di f:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \displaystyle\int_0^{3x^2+x^3} \frac{1+2e^{-t}}{3+e^{-t}}\,dt.$

(i) Determinare il dominio e l'insieme di positività della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\{f \geq 0\} = [-3,\, +\infty[\,.$$

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = (6x + 3x^2)\,\frac{1+2e^{-(3x^2+x^3)}}{3+e^{-(3x^2+x^3)}}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strettamente crescente su: $\;]-\infty,\,-2\,]\;$ e su $\;[\,0,\,+\infty[\,.$

Monotona strettamente decrescente su: $\;[-2,\,0\,]\,.$

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f.

Punto di minimo relativo: $x = 0\,.$

Punto di massimo relativo: $x = -2\,.$

(iv) Osservando che $\dfrac{1+2e^{-t}}{3+e^{-t}} \geq \dfrac{1}{3}$ per ogni t, e confrontando $f(x)$ con $\displaystyle\int_0^{3x^2+x^3} \frac{dt}{3}$, calcolare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,.$$

(v) Determinare l'immagine di f :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.