

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica
(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 15 Dicembre 2003

d31721

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
B	A	A	B	D	B

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Siano z_0, z_1, z_2, z_3 le quattro radici quartiche di $1 - \sqrt{3}i$. Si ha:

☐ A $|z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3| = 16$.

☒ B $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

☐ C $|z_0| + |z_1| + |z_2| + |z_3| = 8$.

☐ D $(z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)^2 = 4$.

ESERCIZIO 2. Calcolare il valore dell'integrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(x + \cos x)^4} dx$.

☒ A $I = \frac{\pi^3 - 8}{3\pi^3}$.

☐ B $I = -\frac{8}{3\pi^3}$.

☐ C $I = 0$.

☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 3. Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

- ☒ Se f è pari e si ha $f(0) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$, allora f ha almeno due zeri.
- ☐ Se f è dispari e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, allora f ha almeno due zeri.
- ☐ Se f è dispari allora f ammette o massimo o minimo assoluto.
- ☐ Se f è pari allora f ammette o massimo o minimo assoluto.

ESERCIZIO 4. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x; \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{(y+3)}{1+x^2}, \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x; \alpha)$. Si ha:

- ☐ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il limite $\ell(\alpha)$ non esiste.
- ☒ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = -3$.
- ☐ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = +\infty$.
- ☐ Non esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = 0$.

ESERCIZIO 5. Calcolare (se esiste) il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - (e^{x^2} - 1)}{x^4}.$$

- ☐ $\ell = \frac{1}{6}$.
- ☐ Il limite ℓ non esiste.
- ☐ $\ell = 0$.
- ☒ $\ell = -\frac{5}{6}$.

ESERCIZIO 6. Per ogni fissato $\alpha \geq 0$, si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ Esiste $\alpha \in [0, 1]$ per cui la funzione f_α ha un punto critico in $x_0 = 0$.
- ☒ Per qualunque $\alpha > 0$ la funzione f_α ha un punto critico nell'intervallo $]0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}[$.
- ☐ Esiste $\alpha \in [1, 3]$ per cui si ha $\lim_{x \rightarrow 0} f'_\alpha(x) = 0$.
- ☐ Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \frac{-x^2 + x + 30}{\sqrt{2x^2 - 7x + 3}}$.

- (i) Determinare il dominio naturale di f :

$$\text{Dom}(f) =] -\infty, 1/2[\cup]3, +\infty[.$$

- (ii) Determinare eventuali intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x : \quad x = -5, 6.$$

$$\text{asse } y : \quad y = \frac{30}{\sqrt{3}}.$$

- (iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} = [-5, 1/2[\cup]3, 6].$$

- (iv) Determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui (nel caso della presenza di asintoti obliqui è sufficiente determinarne il coefficiente angolare).

$$\text{Asintoti verticali (unilateri):} \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 3.$$

$$\text{Asintoti obliqui (unilateri):} \quad y = -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \quad \text{for } x \rightarrow +\infty.$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \quad \text{for } x \rightarrow -\infty.$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

- (v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_0^{6x^2-x^3} \frac{3+e^t}{1+2e^t} dt$.

- (i) Determinare il dominio e l'insieme di positività della funzione.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\{f \geq 0\} =]-\infty, 6].$$

- (ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = (12x - 3x^2) \frac{3 + e^{(6x^2-x^3)}}{1 + 2e^{(6x^2-x^3)}}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strettamente crescente su: $[0, 4]$.

Monotona strettamente decrescente su: $] -\infty, 0]$ e su $[4, +\infty[$.

- (iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

Punto di minimo relativo: $x = 0$.

Punto di massimo relativo: $x = 4$.

- (iv) Osservando che $\frac{3+e^t}{1+2e^t} \geq \frac{1}{2}$ per ogni t , e confrontando $f(x)$ con $\int_0^{6x^2-x^3} \frac{dt}{2}$, calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

- (v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.