I APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA L-A

Ing. Informatica (L-Z), Ing. Energetica, Ing. Elettronica ed Ing. dell'Automazione

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2004/2005, 10 Dicembre 2004

c65729

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

Corso di Laurea: ....

1	2	3	4	5	6
D	B	A	D	B	B

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4.5 punti, ogni risposta sbagliata vale -0.5, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 7 vale 12 punti (le domande (i), (ii), (iii), (iv) e (vii), in totale, valgono 9 punti).*

ESERCIZIO 1. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{11x^2+3x-2}{7x^2-3x+2}\right),$$

e se ne determini il dominio naturale.

A $\mathrm{Dom} f = \,]-\infty, -4] \cup [-2, 1]\,.$

B $\mathrm{Dom} f = \,]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[\,.$

C $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}\,.$

~~D~~ $\mathrm{Dom} f = [-2, \frac{1}{2}]\,.$

ESERCIZIO 2. Si consideri l'equazione

$$|z|^2 + 3(z - \overline{z}) = 3\,i\,z\,. \tag{E}$$

Si ha:

A L'equazione (E) ha infinite soluzioni.

~~B~~ L'equazione (E) ha due soluzioni.

C L'equazione (E) non ha soluzioni.

D Tutte le soluzioni dell'equazione (E) sono numeri reali.

ESERCIZIO 3. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x;\, \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} - (\alpha + 6y)\, x\, e^{x^2} = 0\,, \\ y(0) = 2\,, \end{cases}$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x;\, \alpha)$. Si ha:

[X] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = 2$.

[B] $\ell(\alpha) = +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

[C] $\ell(\alpha) = -\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

[D] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = 0$.

ESERCIZIO 4. La successione di termine generale $a_n = \left(\dfrac{n^3 - 3}{n^3} \right)^{n^2}$ è :

[A] infinitesima.

[B] convergente a $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0,\, 1\}$.

[C] divergente.

[X] convergente a 1.

ESERCIZIO 5. Si consideri la funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{|t+1|}{(1+t^2)^4}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

[A] La funzione f non è derivabile in qualche $x \in \mathbb{R}$.

[X] La funzione f è derivabile in $x_0 = -1$ e $f'(-1) = 0$.

[C] La funzione f non ha punti critici.

[D] La funzione f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 0$.

ESERCIZIO 6. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 + x + x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0\,, \\ e^x & \text{se} \quad x \leq 0\,. \end{cases}$$

Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

[A] Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f_α è continua.

[X] Per qualunque $\alpha > 1$ la funzione f_α è derivabile.

[C] Esiste $\alpha \in [0,\, 1]$ per cui la funzione f_α è derivabile.

[D] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione f_α ha un punto critico $x_0 = 0$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = |5x+1|\, e^{\frac{1}{x}}$.

(i) Determinare il dominio

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

ed eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Asintoto verticale (unilatero, da destra): $x = 0$.

Asintoti obliqui (unilateri): $y = 5x + 6$ per $x \to +\infty$.

$y = -5x - 6$ per $x \to -\infty$.

Non ci sono asintoti orizzontali.

(ii) Determinare eventuali punti singolari di f (specificandone la natura).

Il grafico di f ha un punto angoloso in: $(-1/5,\, 0)$.

(iii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strett. cresc. su: $\left[-\frac{1}{5}, \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right]$ e su $\left[\frac{5+3\sqrt{5}}{10}, +\infty\right[$.

Monotona strett. decresc. su: $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$, su $\left[\frac{5-3\sqrt{5}}{10}, 0\right[$ e su $\left]0, \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right]$.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f.

Punto di massimo relativo: $x = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$.

Punto di minimo relativo: $x = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$.

Punto di minimo assoluto: $x = -\frac{1}{5}$.

(v) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa ed in quali intervalli è concava.

Convessa su: $\left]-\infty, -\frac{1}{5}\right]$, su $\left[-\frac{1}{7}, 0\right[$ e su $\left]0, +\infty\right[$.

Concava su: $\left[-\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}\right]$.

(vi) Determinare eventuali punti di flesso di f.

Punto di flesso: $x = -\frac{1}{7}$.

(vii) Determinare l'immagine di f :

$$\mathrm{Im}(f) = \left[0, +\infty\right[.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.