

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA L-A

Ing. Informatica (L-Z), Ing. Energetica,
Ing. Elettronica ed Ing. dell'Automazione

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2004/2005, 10 Dicembre 2004

d23361

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

1	2	3	4	5	6
C	C	D	C	C	B

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4.5 punti, ogni risposta sbagliata vale -0.5, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 7 vale 12 punti (le domande (i), (ii), (iii), (iv) e (vii), in totale, valgono 9 punti).

ESERCIZIO 1. La successione di termine generale $a_n = \left(\frac{2+n^2}{n^2}\right)^{-n^4}$ è :

- ☐ A divergente .
☐ B convergente a $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0, e\}$.
☒ C infinitesima .
☐ D convergente a e .

ESERCIZIO 2. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{se } x \geq 0, \\ x + x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A Esiste $\alpha \in [0, 1]$ per cui la funzione f_α è derivabile.
☐ B Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f_α è continua.
☒ C Per qualunque $\alpha > 1$ la funzione f_α è derivabile.
☐ D Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione f_α ha un punto critico $x_0 = 0$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la funzione $f(x) = \int_0^x \frac{|2-t|}{1+t^4} dt$, $x \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A La funzione f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 0$.
- ☐ B La funzione f non è derivabile in qualche $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ C La funzione f non ha punti critici.
- ☒ D La funzione f è derivabile in $x_0 = 2$ e $f'(2) = 0$.

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \arccos\left(\frac{6x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 2x + 5}\right),$$

e se ne determini il dominio naturale.

- ☐ A $\text{Dom} f =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.
- ☐ B $\text{Dom} f =]-\infty, -4] \cup [2, +\infty[$.
- ☒ C $\text{Dom} f = [-2, \frac{2}{3}]$.
- ☐ D $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 5. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x; \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} + (2y - \alpha) x e^{x^2} = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x; \alpha)$. Si ha:

- ☐ A Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = +\infty$.
- ☐ B Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = -\infty$.
- ☒ C Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = 1$.
- ☐ D $\ell(\alpha) \neq 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 6. Si consideri l'equazione

$$i|z|^2 + 5(z + \bar{z}) = 5iz. \quad (\text{E})$$

Si ha:

- ☐ A Una soluzione dell'equazione (E) è un numero immaginario puro.
- ☒ B L'equazione (E) ha due soluzioni.
- ☐ C L'equazione (E) ha infinite soluzioni.
- ☐ D L'equazione (E) non ha soluzioni.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = |3x - 1| e^{-\frac{1}{x}}$.

- (i) Determinare il dominio

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

ed eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Asintoto verticale (unilatero, da sinistra): $x = 0$.

Asintoti obliqui (unilateri): $y = 3x - 4$ per $x \rightarrow +\infty$.
 $y = -3x + 4$ per $x \rightarrow -\infty$.

Non ci sono asintoti orizzontali.

- (ii) Determinare eventuali punti singolari di f (specificandone la natura).

Il grafico di f ha un punto angoloso in: $(1/3, 0)$.

- (iii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strett. cresc. su: $\left[-\frac{3+\sqrt{21}}{6}, 0\right]$, su $\left[0, \frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right]$, e su $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right]$.

Monotona strett. decresc. su: $\left]-\infty, -\frac{3+\sqrt{21}}{6}\right]$ e su $\left[\frac{-3+\sqrt{21}}{6}, \frac{1}{3}\right]$.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

Punto di massimo relativo: $x = \frac{-3+\sqrt{21}}{6}$.

Punto di minimo relativo: $x = -\frac{3+\sqrt{21}}{6}$.

Punto di minimo assoluto: $x = \frac{1}{3}$.

- (v) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa ed in quali intervalli è concava.

Convessa su: $\left]-\infty, 0\right]$, su $\left]0, \frac{1}{5}\right]$ e su $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right]$.

Concava su: $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right]$.

- (vi) Determinare eventuali punti di flesso di f .

Punto di flesso: $x = \frac{1}{5}$.

(vii) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty[.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.