II APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2003/2004, 20 Gennaio 2004

e23768

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

1	2	3	4	5	6
C	A	B	D	D	C

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Si considerino una funzione $f\ :\ ]-1,1[\ \to \mathbb{R}$ continua in $x = 0$, tale che $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, e la successione di termine generale $a_n = (n - \sin n)\left(\dfrac{1}{n} - \sin\dfrac{1}{n}\right)$. Si ha:

A La successione $\{f(a_n)\}_n$ è irregolare.

B La successione $\{f(a_n)\}_n$ è infinitesima.

~~C~~ La successione $\{f(a_n)\}_n$ è convergente a $\dfrac{\pi}{2}$.

D Non è possibile stabilire il comportamento della successione $\{f(a_n)\}_n$ in base alle informazioni disponibili.

ESERCIZIO 2. Data una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

~~A~~ Se f è continua su $]0, 1[$, e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, allora f ammette minimo assoluto su $[0, 1]$.

B Se f è limitata, ed è continua su $]0, 1[$, allora f ammette massimo e minimo assoluto su $[0, 1]$.

C Se f è continua su $]0, 1[$ e ammette massimo e minimo assoluto su $[0, 1]$, allora f è continua su $[0, 1]$.

D Se f è continua su $]0, 1[$ e ammette massimo e minimo assoluto su $[0, 1]$, allora esistono i limiti $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la funzione $f(x) = x^3\left(\frac{8x^2}{9} - \sqrt[3]{1+x}\right)$, e si determini il valore della derivata quinta $f^5(0)$. (Si ricordi lo sviluppo asintotico $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$).

[A] $f^5(0) = \frac{8}{9 \cdot 5!}$.

[X] $f^5(0) = 5!$.

[C] $f^5(0) = 0$.

[D] $f^5(0) = -\frac{7 \cdot 5!}{9}$.

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione $f(x) = \int_{-x}^{x} t^2 \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$, $x \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

[A] La funzione f è decrescente.

[B] $f'(x) \neq 0 \quad \forall\, x$.

[C] $f'(x) = 0 \quad \forall\, x$.

[X] La funzione derivata f' è pari.

ESERCIZIO 5. Calcolare il modulo ed un argomento del numero complesso $z = \frac{(1+i)^3}{-2i}$.

[A] $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$.

[B] $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$.

[C] $|z| = 2$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$.

[X] $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{5\pi}{4}$.

ESERCIZIO 6. Sia $x \mapsto \varphi(x;\, c)$, $x > -1$, $(c \in \mathbb{R})$ l'integrale generale dell'equazione

$$\dot{y} + \frac{3y}{1+x} = \frac{e^x}{(1+x)^3}, \qquad x > -1,$$

e si consideri il limite $\ell(c) \doteq \lim_{x \to -1^+} \varphi(x;\, c)$. Allora si ha:

[A] $\ell(c) = +\infty$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

[B] Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) \in \mathbb{R}$.

[X] Non esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = 0$.

[D] Non esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = -\infty$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2x+1-|x|}{|x+1|}\right)$.

(i) Determinare il dominio naturale di f:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,.$$

(ii) Determinare eventuali interesezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x: \qquad x = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{asse } y: \qquad y = \frac{\pi}{4}.$$

(iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[.$$

(iv) Determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui.

Asintoti orizzontali (unilateri): $\quad y = \arctan(-3) \quad \text{per} \quad x \to -\infty\,.$

$$y = \frac{\pi}{4} \quad \text{per} \quad x \to +\infty\,.$$

Non ci sono asintoti verticali od obliqui.

(v) Determinare eventuali punti di discontinuità a salto.

Non ci sono punti di discontinuità a salto.

(vi) Determinare l'immagine di f:

$$\mathrm{Im}(f) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = x \ln^2 x$.

(i) Determinare il dominio

$$\mathrm{Dom}(f) =]\,0,\, +\infty[\,.$$

ed eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Non ci sono asintoti orizzontali, verticali od obliqui.

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strettamente crescente su: $\left]\,0,\, e^{-2}\right]$ e su $\left[1,\, +\infty\right[$.

Monotona strettamente decrescente su: $\left[e^{-2},\, 1\right]$.

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f.

Punto di minimo (assoluto): $x = 1$.

Punto di massimo relativo: $x = e^{-2}$.

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa ed in quali intervalli è concava.

Concava su: $\left]\,0,\, e^{-1}\right]$.

Convessa su: $\left[e^{-1},\, +\infty\right[$.

(v) Determinare eventuali punti di flesso di f.

Punto di flesso: $x = e^{-1}$.

(vi) Determinare l'immagine di f :

$$\mathrm{Im}(f) = [\,0,\, +\infty[\,.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.