

II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA L-A

Ing. Informatica (L-Z), Ing. Energetica,
Ing. Elettronica ed Ing. dell'Automazione

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2004/2005, 11 Gennaio 2005

a45981

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

1	2	3	4	5	6
A	B	C	C	D	B

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4.5 punti, ogni risposta sbagliata vale -0.5, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 7 vale 9 punti.

ESERCIZIO 1. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi_\alpha(x)$, $x > 1$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} + \frac{y}{x \ln x} = \frac{\alpha}{x}, \\ y(e) = 1, \end{cases}$$

Si ha:

☒ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi_\alpha(x) = 0$.

☐ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi_\alpha(x) = +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(x) = +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(x) \neq 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2. Calcolare il valore dell'integrale $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$.

☐ $I = \frac{1 + 3e^{-2}}{2}$.

☒ $I = \frac{1 - 3e^{-2}}{4}$.

☐ $I = \frac{1}{4}$.

☐ $I = \frac{1 - 5e^{-2}}{2}$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt[6]{\sqrt{1 - \ln(x - 4)} - 1},$$

e se ne determini il dominio naturale.

- ☐ A Dom $f =]4, +\infty[$.
- ☐ B Dom $f = [5, 4 + e^{-1}]$.
- ☒ C Dom $f =]4, 5]$.
- ☐ D Dom $f = [4, 4 + e^{-1}]$.

ESERCIZIO 4. Calcolare (se esiste) il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\ln(1-x) + x) + x^2}{x(\cos x - 1)}.$$

(Si ricordino gli sviluppi asintotici $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$ per $x \rightarrow 0$). Si ha:

- ☐ A $\ell = 0$.
- ☐ B $\ell = -\frac{1}{3}$.
- ☒ C $\ell = \frac{4}{3}$.
- ☐ D Il limite ℓ non esiste.

ESERCIZIO 5. Si consideri l'equazione

$$z^5 + (1 - i\sqrt{3})z = 0. \quad (\text{E})$$

Si ha:

- ☐ A Tutte le soluzioni dell'equazione (E) hanno lo stesso modulo.
- ☐ B L'equazione (E) ha solamente due soluzioni che soddisfano la disuguaglianza $\operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Im}(z)$.
- ☐ C L'equazione (E) non ha soluzioni z che soddisfano l'uguaglianza $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.
- ☒ D L'equazione (E) ha tre soluzioni che soddisfano la disuguaglianza $\operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Im}(z)$.

ESERCIZIO 6. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sinh(\sin x - x + \pi).$$

Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A La funzione f non ha zeri nell'intervallo $[0, +\infty[$.
- ☒ B La funzione f ha un solo zero in $\mathbb{R}$.
- ☐ C La funzione f ha uno zero nell'intervallo $] -\infty, 0]$.
- ☐ D La funzione f ha infiniti zeri in $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_0^{x^3+5x^2+6x} \left(\arctan t + \frac{3\pi}{4} \right) dt$.

- (i) Determinare il dominio e l'insieme di positività della funzione.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\{f \geq 0\} = [-3, -2] \cup [0, +\infty[.$$

- (ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \left(\arctan(x^3 + 5x^2 + 6x) + \frac{3\pi}{4} \right) (3x^2 + 10x + 6).$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$$\text{Monotona strett. cresc. su: } \left] -\infty, -\frac{5+\sqrt{7}}{3} \right] \quad \text{e su} \quad \left[\frac{-5+\sqrt{7}}{3}, +\infty \right[.$$

$$\text{Monotona strett. decresc. su: } \left[-\frac{5+\sqrt{7}}{3}, \frac{-5+\sqrt{7}}{3} \right].$$

- (iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

$$\text{Punto di massimo relativo: } x = -\frac{5+\sqrt{7}}{3}.$$

$$\text{Punto di minimo relativo: } x = \frac{-5+\sqrt{7}}{3}.$$

- (iv) Osservando che $\arctan t + \frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{4}$ per ogni t , e confrontando $f(x)$ con $\int_0^{x^3+5x^2+6x} \frac{\pi}{4} dt$, calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

- (v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.