II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA L-A

Ing. Informatica (L-Z), Ing. Energetica, Ing. Elettronica ed Ing. dell'Automazione

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2004/2005, 11 Gennaio 2005

b37991

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

Corso di Laurea: ....

1	2	3	4	5	6
B	A	C	D	A	D

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4.5 punti, ogni risposta sbagliata vale -0.5, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 7 vale 9 punti.*

ESERCIZIO 1. Calcolare (se esiste) il limite

$$\ell \doteq \lim_{x\to 0} \frac{\big(\ln(1+2x)-2x\big)+2x^2}{\sin x - x}\,.$$

(Si ricordino gli sviluppi asintotici $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}\,x^n}{n} + o(x^n)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n\,x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$ per $x \to 0$). Si ha:

- [A] $\ell = 0$.
- [X] $\ell = -16$.
- [C] $\ell = \frac{8}{9}$.
- [D] Il limite ℓ non esiste.

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt[4]{1-\sqrt{1+\ln(x-3)}}\,,$$

e se ne determini il dominio naturale.

- [X] $\mathrm{Dom}f = \big[3+e^{-1},\,4\big]$.
- [B] $\mathrm{Dom}f = \big[3+e^{-1},\,+\infty\big[$.
- [C] $\mathrm{Dom}f = \big]3,\,4+e^{-1}\big]$.
- [D] $\mathrm{Dom}f = \big]3,\,3+e^{-1}\big]$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sinh\left(x + \frac{\pi}{2} - \cos x\right).$$

Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

A La funzione f ha infiniti zeri in $\mathbb{R}$.

B La funzione f ha uno zero nell'intervallo $[0, +\infty[$.

☒ La funzione f ha un solo zero in $\mathbb{R}$.

D La funzione f non ha zeri nell'intervallo $]-\infty, 0]$.

ESERCIZIO 4. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi_\alpha(x)$, $x > 0$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} - \dfrac{y}{x} = \alpha \ln x, \\ y(1) = -1, \end{cases}$$

Si ha:

A $\varphi_\alpha(e) \neq -1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

B Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\lim_{x \to 0^+} \varphi_\alpha(x) = +\infty$.

C Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\lim_{x \to 0^+} \varphi_\alpha(x) = -\infty$

☒ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\varphi_\alpha(e) = 0$.

ESERCIZIO 5. Si consideri l'equazione

$$z^5 + \left(1 + i\sqrt{3}\right)z = 0. \tag{E}$$

Si ha:

☒ L'equazione (E) ha tre soluzioni che soddisfano la disuguaglianza $\text{Re}(z) \leq \text{Im}(z)$.

B L'equazione (E) ha solamente due soluzioni che soddisfano la disuguaglianza $\text{Re}(z) \leq \text{Im}(z)$.

C L'equazione (E) non ha soluzioni reali.

D Tulle le soluzioni dell'equazione (E) hanno lo stesso modulo.

ESERCIZIO 6. Calcolare il valore dell'integrale $I = \displaystyle\int_2^{e+1} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}\, dx$.

A $I = 1 + e^{-1}$.

B $I = e^{-2}$.

C $I = 1$.

☒ $I = 1 - 2e^{-1}$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^3+9x^2+15x} \left(\frac{5\,\pi}{6} - \arctan t\right)\, dt.$

(i) Determinare il dominio e l'insieme di positività della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\{f \geq 0\} = \left[-\frac{9+\sqrt{21}}{2},\ \frac{-9+\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[0,\ +\infty\right[.$$

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \left(\frac{5\,\pi}{6} - \arctan(x^3 + 9x^2 + 15x)\right)\left(3x^2 + 18x + 15\right).$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strett. cresc. su: $\left]-\infty,\ -5\right]$ e su $\left[-1,\ +\infty\right[$.

Monotona strett. decresc. su: $\left[-5,\ -1\right]$.

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f.

Punto di massimo relativo: $x = -5$.

Punto di minimo relativo: $x = -1$.

(iv) Osservando che $\dfrac{5\,\pi}{6} - \arctan t > \dfrac{\pi}{3}$ per ogni t, e confrontando $f(x)$ con $\displaystyle\int_0^{x^3+9x^2+15x} \frac{\pi}{3} dt$, calcolare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

(v) Determinare l'immagine di f :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.