

II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 20 Gennaio 2004

f51697

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
D	C	B	B	D	A

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Si consideri la funzione $f(x) = \int_{-x}^x \frac{e^{-t^2}}{1+t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A Esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = 0$.
- ☐ B La funzione f è decrescente.
- ☐ C La funzione derivata f' è dispari.
- ☒ D $f'(0) = 2$.

ESERCIZIO 2. Calcolare il modulo ed un argomento del numero complesso $z = \frac{i^3}{(1-i)^2}$.

- ☐ A $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\arg(z) = \pi$.
- ☐ B $|z| = \frac{1}{2}$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$.
- ☒ C $|z| = \frac{1}{2}$, $\arg(z) = 2\pi$.
- ☐ D $|z| = \frac{1}{2}$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$.

ESERCIZIO 3. Sia $x \mapsto \varphi(x; c)$, $|x| < 1$, ($c \in \mathbb{R}$) l'integrale generale dell'equazione

$$\dot{y} = \frac{2-y}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1,$$

e si consideri il limite $\ell(c) \doteq \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x; c)$. Allora si ha:

☐ **A** Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = +\infty$.

☒ **B** Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = 0$.

☐ **C** Esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = -\infty$.

☐ **D** Non esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(c) = \pi$.

ESERCIZIO 4. Si considerino una funzione $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continua in $x = 0$, tale che $f(0) = \sqrt{\pi}$, e la successione di termine generale $a_n = (n + \cos n) \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right)$. Si ha:

☐ **A** La successione $\{f(a_n)\}_n$ è infinitesima.

☒ **B** La successione $\{f(a_n)\}_n$ è convergente a $\sqrt{\pi}$.

☐ **C** Non è possibile stabilire il comportamento della successione $\{f(a_n)\}_n$ in base alle informazioni disponibili.

☐ **D** La successione $\{f(a_n)\}_n$ è irregolare.

ESERCIZIO 5. Si consideri la funzione $f(x) = x^5 \left(\frac{39}{175} x^2 + \sqrt[5]{1+x} \right)$, e si determini il valore

della derivata settima $f^{(7)}(0)$. (Si ricordi lo sviluppo asintotico $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$).

☐ **A** $f^{(7)}(0) = \frac{39 \cdot 6!}{25}$.

☐ **B** $f^{(7)}(0) = 0$.

☐ **C** $f^{(7)}(0) = \frac{1}{7}$.

☒ **D** $f^{(7)}(0) = 6!$.

ESERCIZIO 6. Data una funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

☒ **A** Se f è monotona su $[0, 1]$, allora f ammette massimo e minimo assoluto.

☐ **B** Se f è monotona e continua su $]0, 1[$, allora f è limitata su $[0, 1]$.

☐ **C** Se f è limitata, ed è continua su $]0, 1[$, allora f ammette massimo e minimo assoluto.

☐ **D** Se f è monotona su $[0, 1]$, allora f è continua su $[0, 1]$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan\left(\frac{|2x-1|}{|x|-1}\right)$.

(i) Determinare il dominio naturale di f :

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

(ii) Determinare eventuali intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x : \quad x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{asse } y : \quad y = -\frac{\pi}{4}.$$

(iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} =]-\infty, -1[\cup \{1/2\} \cup]1, +\infty[.$$

(iv) Determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui.

$$\text{Asintoto orizzontale (bilatero):} \quad y = \arctan(2) \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty.$$

Non ci sono asintoti verticali od obliqui.

(v) Determinare eventuali punti di discontinuità a salto.

$$\text{Punti di discontinuità a salto:} \quad x = -1, x = 1.$$

(vi) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right] \cup \left] \arctan(2), \frac{\pi}{2} \right[$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \ln x (1 + \ln x)$.

(i) Determinare il dominio

$$\text{Dom}(f) =]0, +\infty[.$$

ed eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

$$\text{Asintoto verticale (unilatero): } x = 0.$$

Non ci sono asintoti orizzontali od obliqui.

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$$\text{Monotona strettamente crescente su: } \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty \right[.$$

$$\text{Monotona strettamente decrescente su: } \left] 0, \frac{1}{\sqrt{e}} \right].$$

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

$$\text{Punto di minimo (assoluto): } x = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Non ci sono punti di massimo relativo.

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa ed in quali intervalli è concava.

$$\text{Concava su: } [\sqrt{e}, +\infty[.$$

$$\text{Convessa su: }]0, \sqrt{e}].$$

(v) Determinare eventuali punti di flesso di f .

$$\text{Punto di flesso: } x = \sqrt{e}.$$

(vi) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty \right[.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.