

III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2002/2003, 17 marzo 2003

d32139

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
A	D	C	B	A	C

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale $-1/2$, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare (se esiste) il limite della successione

$$\ell(\alpha) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Si ha:

- ☒ $\ell(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha.$
- ☐ $\ell(\alpha) = 0 \quad \text{se e solo se } \alpha > 0.$
- ☐ $\ell(\alpha)$ non esiste $\forall \alpha < 0.$
- ☐ $\ell(\alpha) = 1$ per qualche $\alpha.$

ESERCIZIO 2. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_\alpha(x) = x^5 + 2x + \alpha$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f_α non ha zeri nell'intervallo $] -\infty, 0]$.
- ☐ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione f_α ha almeno due zeri in $\mathbb{R}$.
- ☐ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione f_α non ha zeri in $\mathbb{R}$.
- ☒ Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f_α ha un solo zero in $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3. Calcolare il valore dell'integrale $I = \int_0^\pi \frac{1 - \sin x}{(x + \cos x)^3} dx$.

☐ A $I = \frac{\pi(2 - \pi)}{2}$.

☐ B $I = \frac{3\pi - 1}{(\pi - 1)^3}$.

☒ C $I = \frac{\pi(\pi - 2)}{2(\pi - 1)^2}$.

☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione $f(x) = \int_0^{|x|} \frac{1}{1+t^5} dt$, $x \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

☐ A f è derivabile in $x = 0$, e $f'(0) = 1$.

☒ B f non è derivabile in $x = 0$.

☐ C f non è derivabile in $x = -1$.

☐ D f è derivabile in $x = 0$, e $f'(0) = 0$.

ESERCIZIO 5. Siano z_0, z_1, z_2 le tre radici cubiche di $27i$. Si ha:

☒ A $\operatorname{Re}(z_0 + z_1 + z_2) = 0$.

☐ B $\operatorname{Im}(z_0 + z_1 + z_2) = 3$.

☐ C $z_0 + z_1 + z_2 = -3i$.

☐ D $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 = 27$.

ESERCIZIO 6. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x; \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{\alpha y - 1}{x^2 + 1}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Si ha:

☐ A Esiste $\alpha \geq 0$ tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_\alpha(x; \alpha) = 0$.

☐ B Esiste α tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(x; \alpha) = +\infty$.

☒ C Esiste α tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(x; \alpha) = 1$.

☐ D Esiste α tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_\alpha(x; \alpha) = -\infty$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = x \ln\left(\frac{|3x^2 - 2x + 5|}{2x^2 + 3x + 1}\right)$.

(i) Determinare il dominio naturale di f :

$$\text{Dom}(f) =] -\infty, -1[\cup] -1/2, +\infty[.$$

(ii) Determinare eventuali intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x : \quad x = 0, \quad x = 1, \quad x = 4.$$

$$\text{asse } y : \quad y = 0.$$

(iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} = [0, 1] \cup [4, +\infty[.$$

(iv) Determinare eventuali asintoti orizzontali e verticali (non occorre determinare eventuali asintoti obliqui).

$$\text{Asintoti verticali:} \quad x = -1, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

$$\text{Asintoto obliquo (non richiesto):} \quad y = \ln\left(\frac{3}{2}\right)x - \frac{13}{6}.$$

(v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

(vi) Tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = e^{-x} \sqrt{x-2}$.

(i) Determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Asintoto orizzontale: $y = 0$.

Non ci sono asintoti verticali od obliqui.

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona crescente su: $\left[2, \frac{5}{2}\right]$.

Monotona decrescente su: $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$.

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

Punto di minimo assoluto: $x = 2$.

Punto di massimo assoluto: $x = \frac{5}{2}$.

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa ed in quali intervalli è concava.

Convessa su: $\left[\frac{5+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

Concava su: $\left[2, \frac{5+\sqrt{2}}{2}\right]$.

(v) Determinare eventuali punti di flesso di f .

Punto di flesso: $x = \frac{5+\sqrt{2}}{2}$.

(vi) Tracciare il grafico probabile della funzione.