III APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2002/2003, 17 marzo 2003

d72159

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

1	2	3	4	5	6
D	C	B	B	A	C

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Si consideri la funzione $f(x) = \int_0^{|x|} \frac{1}{1+t^7}\, dt\,,\ x \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ f è derivabile in $x = 0$, e $f'(0) = 0$.

$\boxed{\text{B}}$ f non è derivabile in $x = -1$.

$\boxed{\text{C}}$ f è derivabile in $x = 0$, e $f'(0) = 1$.

$\boxed{\text{D}}$ f non è derivabile in $x = 0$.

ESERCIZIO 2. Siano z_0, z_1, z_2 le tre radici cubiche di $-125i$. Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ $z_0 + z_1 + z_2 = 5i$.

$\boxed{\text{B}}$ $\mathrm{Im}\,(z_0 + z_1 + z_2) = -5$.

$\boxed{\text{C}}$ $\mathrm{Re}\,(z_0 + z_1 + z_2) = 0$.

$\boxed{\text{D}}$ $z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 = -125$.

ESERCIZIO 3. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_\alpha(x) = x^7 + 5x + \alpha$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione f_α ha almeno due zeri in $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{X}}$ Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f_α ha un solo zero in $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f_α non ha zeri nell'intervallo $]-\infty, 0]$.

$\boxed{\text{D}}$ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione f_α non ha zeri in $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x;\, \alpha)$, $|x| < 1$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{\alpha\, y + 1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \\ y(0) = -\frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ Esiste α tale che $\lim_{x\to 1^-} \varphi_\alpha(x;\, \alpha) = +\infty$.

$\boxed{\text{X}}$ Esiste α tale che $\lim_{x\to 1^-} \varphi_\alpha(x;\, \alpha) = -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{C}}$ Esiste $\alpha \geq 0$ tale che $\lim_{x\to 1^-} \varphi_\alpha(x;\, \alpha) = 0$.

$\boxed{\text{D}}$ Esiste α tale che $\lim_{x\to -1^+} \varphi_\alpha(x;\, \alpha) = -\infty$.

ESERCIZIO 5. Calcolare il valore dell'integrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2+\tan^2 x}{(1+x+\tan x)^3}\, dx$.

$\boxed{\text{X}}$ $I = \dfrac{\pi^2 + 16\pi + 48}{2(8+\pi)^2}$.

$\boxed{\text{B}}$ $I = \dfrac{8 - \pi^2 - 16\pi}{32}$.

$\boxed{\text{C}}$ $I = \dfrac{\pi + 6}{2(\pi+8)}$.

$\boxed{\text{D}}$ Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 6. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare (se esiste) il limite della successione

$$\ell(\alpha) \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ $\ell(\alpha) = 0$ se e solo se $\alpha > 0$.

$\boxed{\text{B}}$ $\ell(\alpha)$ non esiste $\forall\, \alpha < 1$.

$\boxed{\text{X}}$ $\ell(\alpha) = 0$ $\forall\, \alpha$.

$\boxed{\text{D}}$ $\ell(\alpha) = \frac{1}{2}$ per qualche α.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = x\ \ln\left(\dfrac{|3x^2+8x+7|}{5x^2+11x+2}\right)$.

(i) Determinare il dominio naturale di f:

$$\mathrm{Dom}(f) = \left]-\infty,\ -2\right[\ \cup\ \left]-1/5,\ +\infty\right[.$$

(ii) Determinare eventuali interesezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x: \qquad x = 0,\quad x = -\frac{5}{2},\quad x = 1\,.$$

$$\text{asse } y: \qquad y = 0\,.$$

(iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} = \left]-\infty,\ -5/2\right]\ \cup\ [0,\ 1]\,.$$

(iv) Determinare eventuali asintoti orizzontali e verticali (non occorre determinare eventuali asintoti obliqui).

$$\text{Asintoti verticali:} \qquad x = -2,\quad x = -\frac{1}{5}\,.$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

$$\text{Asintoto obliquo (non richiesto):} \qquad y = \ln\left(\frac{3}{5}\right)x + \frac{7}{15}\,.$$

(v) Determinare l'immagine di f:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

(vi) Tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = e^x \sqrt{1-3x}$.

i) Determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Asintoto orizzontale: $y = 0$.

Non ci sono asintoti verticali od obliqui.

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona crescente su: $\left]-\infty, -\frac{1}{6}\right]$.

Monotona decrescente su: $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$.

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f.

Punto di minimo assoluto: $x = \frac{1}{3}$.

Punto di massimo assoluto: $x = -\frac{1}{6}$.

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa ed in quali intervalli è concava.

Convessa su: $\left]-\infty, -\frac{1+3\sqrt{2}}{6}\right]$.

Concava su: $\left[-\frac{1+3\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{3}\right]$.

(v) Determinare eventuali punti di flesso di f.

Punto di flesso: $x = -\frac{1+3\sqrt{2}}{6}$.

(vi) Tracciare il grafico probabile della funzione.