

III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 25 Marzo 2004

g58968

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
D	C	C	B	B	B

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)^2 - x^2}{x(\sqrt{1+x} - 1)}.$$

(Si ricordino gli sviluppi asintotici $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, e $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$). Si ha:

- ☐ A $\ell = -\infty$.
- ☐ B $\ell = 1$.
- ☐ C $\ell = 0$.
- ☒ D $\ell = 2$.

ESERCIZIO 2. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} |x + \alpha| & \text{se } x > 0, \\ e^x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Si ha:

- ☐ A Esiste un solo $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f_α è continua.
- ☐ B Esistono infiniti $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f_α è continua.
- ☒ C Esistono due soli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f_α è continua.
- ☐ D f_α non è continua per qualunque scelta di $\alpha \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3. Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A Se f ha uno zero, allora $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- ☐ B Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, allora f ha almeno uno zero.
- ☒ C Se $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) < 0$, allora f ha un solo zero.
- ☐ D Se $f(1) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) < 0$, allora f ha almeno due zeri.

ESERCIZIO 4. Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$ continua, si consideri la funzione definita da $F(x) = \int_0^{\sin x} f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A Esiste $x \in \mathbb{R}$ in cui F non è derivabile.
- ☒ B F è derivabile in $x = 0$, e si ha $F'(0) = f(0)$.
- ☐ C F è derivabile in $x = 0$, e si ha $F'(0) = 0$.
- ☐ D F è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$, e si ha $F'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 5. Si consideri l'equazione

$$5z + \frac{|z|^2}{2} = 3\bar{z} + 8i. \quad (\text{E})$$

Si ha:

- ☐ A L'equazione (E) ha quattro soluzioni.
- ☒ B Le soluzioni dell'equazione (E) sono numeri complessi che hanno la stessa parte immaginaria.
- ☐ C Le soluzioni dell'equazione (E) sono numeri complessi che hanno la stessa parte reale.
- ☐ D Le soluzioni dell'equazione (E) sono numeri complessi che hanno lo stesso modulo.

ESERCIZIO 6. Per ogni fissato $\alpha \geq 0$, sia $x \mapsto \varphi_\alpha(x)$, $x > 0$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{\alpha y}{x} - \frac{2x^\alpha}{(3x-1)^2}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(x)$. Allora si ha:

- ☐ A Esiste $\alpha \geq 0$ tale che $\ell(\alpha) = +\infty$.
- ☒ B Esiste $\alpha \geq 0$ tale che $\ell(\alpha) = -1/3$.
- ☐ C $\ell(\alpha)$ esiste finito per ogni $\alpha \geq 0$.
- ☐ D Esiste $\alpha \geq 0$ tale che $\ell(\alpha) = 0$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = (-x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}) \cdot \operatorname{sgn}(1 - x)$.

(i) Determinare il dominio naturale di f :

$$\operatorname{Dom}(f) =]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[.$$

(ii) Determinare eventuali intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x : \quad x = 1.$$

$$\text{asse } y : \quad y = \sqrt{2}.$$

(iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} =]-\infty, -2] \cup [-1, 1].$$

(iv) Determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui.

$$\text{Asintoto orizzontale (unilatero):} \quad y = -3/2 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Asintoto obliquo (unilatero):} \quad y = -2x - 3/2 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty.$$

Non ci sono asintoti verticali.

(v) Determinare eventuali punti di discontinuità a salto.

$$\text{Punto di discontinuità a salto:} \quad x = 1.$$

(vi) Determinare l'immagine di f :

$$\operatorname{Im}(f) =]-3/2, 1 - \sqrt{6}[\cup \{0\} \cup [1, \sqrt{6} - 1[\cup [2, +\infty[.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = x e^{\left(\frac{1}{x^2 - 12}\right)}$.

(i) Determinare il dominio

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}.$$

ed eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

$$\text{Asintoti verticali (unilateri):} \quad x = -2\sqrt{3} \quad \text{per } x \rightarrow -2\sqrt{3} - .$$

$$x = 2\sqrt{3} \quad \text{per } x \rightarrow 2\sqrt{3} + .$$

$$\text{Asintoto obliquo (bilatero):} \quad y = x \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty .$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strettamente crescente su:

$$]-\infty, -3\sqrt{2}] \quad \text{su} \quad [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \quad \text{e} \quad \text{su} \quad [3\sqrt{2}, +\infty[.$$

Monotona strettamente decrescente su:

$$[-3\sqrt{2}, -2\sqrt{3}[\quad \text{su} \quad]-2\sqrt{3}, -2\sqrt{2}] \quad \text{su} \quad [2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}[\quad \text{e} \quad \text{su} \quad]2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}].$$

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

$$\text{Punti di minimo relativo:} \quad x = -2\sqrt{2}, \quad x = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Punti di massimo relativo:} \quad x = -3\sqrt{2}, \quad x = 2\sqrt{2}.$$

(iv) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =]-\infty, -3\sqrt{2}\sqrt[4]{e}] \cup \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{e}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{e}}\right] \cup [3\sqrt{2}\sqrt[4]{e}, +\infty[.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.