

III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 25 Marzo 2004

h72521

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
C	B	D	B	A	A

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, -1]$ continua, si consideri la funzione definita da $F(x) = \int_0^{\cos x} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A F è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$, e si ha $F'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ B Esiste $x \in \mathbb{R}$ in cui F non è derivabile.
- ☒ C F è derivabile in $x = 0$, e si ha $F'(0) = 0$.
- ☐ D F è derivabile in $x = 0$, e si ha $F'(0) = f(0)$.

ESERCIZIO 2. Per ogni fissato $\alpha \geq 0$, sia $x \mapsto \varphi_\alpha(x)$, $x > 0$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -\frac{\alpha y}{x} + \frac{3}{x^\alpha(2x+1)^2}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(x)$. Allora si ha:

- ☐ A Esiste $\alpha \geq 0$ tale che $\ell(\alpha) = +\infty$.
- ☒ B Esiste $\alpha \geq 0$ tale che $\ell(\alpha) = 1/2$.
- ☐ C $\ell(\alpha) \neq 0$ per ogni $\alpha \geq 0$.
- ☐ D Non esiste $\alpha \geq 0$ tale che $\ell(\alpha) = 0$.

ESERCIZIO 3. Si consideri l'equazione

$$z - i|z|^2 = 5 - 4\bar{z}. \quad (\text{E})$$

Si ha:

- ☐ A Le soluzioni dell'equazione (E) sono numeri complessi che hanno la stessa parte immaginaria.
- ☐ B Le soluzioni dell'equazione (E) sono numeri complessi che hanno lo stesso modulo.
- ☐ C L'equazione (E) ha quattro soluzioni.
- ☒ X Le soluzioni dell'equazione (E) sono numeri complessi che hanno la stessa parte reale.

ESERCIZIO 4. Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)^3 - x^3}{x^2(\sqrt[3]{1+x} - 1)}.$$

(Si ricordino gli sviluppi asintotici $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, e $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$). Si ha:

- ☐ A $\ell = 0$.
- ☒ X $\ell = 6$.
- ☐ C $\ell = +\infty$.
- ☐ D $\ell = 2/3$.

ESERCIZIO 5. Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, tale che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☒ X Se $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right) < 0$, allora f ha un solo zero.
- ☐ B Se $f(-1) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right) < 0$, allora f ha almeno due zeri.
- ☐ C Se f ha uno zero, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- ☐ D Se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, allora f ha almeno uno zero.

ESERCIZIO 6. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0, \\ |x + \alpha| & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Si ha:

- ☒ X Esistono due soli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f_α è continua.
- ☐ B Esistono infiniti $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f_α è continua.
- ☐ C f_α non è continua per qualunque scelta di $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ☐ D Esiste un solo $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui f_α è continua.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = (x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}) \cdot \operatorname{sgn}(1 + x)$.

(i) Determinare il dominio naturale di f :

$$\operatorname{Dom}(f) =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[.$$

(ii) Determinare eventuali intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x : \quad x = -1.$$

$$\text{asse } y : \quad y = \sqrt{6}.$$

(iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} = [-1, 2] \cup [3, +\infty[.$$

(iv) Determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui.

$$\text{Asintoto orizzontale (unilatero):} \quad y = -5/2 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty.$$

$$\text{Asintoto obliquo (unilatero):} \quad y = 2x - 5/2 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Non ci sono asintoti verticali.

(v) Determinare eventuali punti di discontinuità a salto.

$$\text{Punto di discontinuità a salto:} \quad x = -1.$$

(vi) Determinare l'immagine di f :

$$\operatorname{Im}(f) =]-5/2, 1 - \sqrt{12}[\cup \{0\} \cup [2, \sqrt{12} - 1[\cup [3, +\infty[.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = -x e^{\left(\frac{1}{x^2 - 4}\right)}$.

(i) Determinare il dominio

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

ed eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

$$\begin{aligned} \text{Asintoti verticali (unilateri):} \quad x = -2 \quad & \text{per } x \rightarrow -2 - , \\ x = 2 \quad & \text{per } x \rightarrow 2 + . \end{aligned}$$

$$\text{Asintoto obliquo (bilatero):} \quad y = -x \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty .$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strettamente decrescente su:

$$]-\infty, -2\sqrt{2}] \quad \text{su} \quad [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \quad \text{e} \quad \text{su} \quad [2\sqrt{2}, +\infty[.$$

Monotona strettamente crescente su:

$$[-2\sqrt{2}, -2[\quad \text{su} \quad]-2, -\sqrt{2}] \quad \text{su} \quad [\sqrt{2}, 2[\quad \text{e} \quad \text{su} \quad]2, 2\sqrt{2}].$$

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

$$\text{Punti di minimo relativo:} \quad x = -2\sqrt{2}, \quad x = \sqrt{2}.$$

$$\text{Punti di massimo relativo:} \quad x = -\sqrt{2}, \quad x = 2\sqrt{2}.$$

(iv) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =]-\infty, -2\sqrt{2}\sqrt[4]{e}] \cup \left[-\sqrt{\frac{2}{e}}, \sqrt{\frac{2}{e}}\right] \cup [2\sqrt{2}\sqrt[4]{e}, +\infty[.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.