III APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA L-A

Ing. Informatica (L-Z), Ing. Energetica,
Ing. Elettronica ed Ing. dell'Automazione

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2004/2005, 18 Aprile 2005

a89527

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

Corso di Laurea: ....

1	2	3	4	5	6
B	C	C	D	A	D

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4.5 punti, ogni risposta sbagliata vale -0.5, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 7 vale 12 punti. (le domande (i), (ii), (iii) e (vi), in totale, valgono 9 punti).*

ESERCIZIO 1. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x;\,\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \cos x(2+y)\,, \\ y(0) = \alpha\,, \end{cases}$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \to -\infty} \varphi(x;\,\alpha)$. Si ha:

A Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ell(\alpha)$ non esiste.

~~B~~ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(\alpha) = -2$.

C Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(\alpha) = 0$.

D Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(\alpha) = -\infty$.

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione $f(x) = \int_{-x}^{x} \exp\Big(-\dfrac{1}{t^2}\Big)dt$, $x \in \mathbb{R}$, e se ne calcoli la derivata in $x = 2$. Si ha:

A $f'(2) = 0$.

B $f'(2) = -\dfrac{1}{4\sqrt[4]{e}}$.

~~C~~ $f'(2) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}$.

D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 3. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \ln\left(x - \sqrt{1-4x^2}\right),$$

e se ne determini il dominio naturale.

- [A] $\text{Dom} f = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2}\right].$
- [B] $\text{Dom} f = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right].$
- [X] $\text{Dom} f = \left]\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2}\right].$
- [D] $\text{Dom} f = \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{5}}, +\infty\right[.$

ESERCIZIO 4. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare (se esiste) il limite della successione

$$\ell(\alpha) \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n + (-1)^n n}{n^\alpha}.$$

Si ha:

- [A] $\ell(\alpha)$ esiste finito per ogni $\alpha > 0$.
- [B] $\ell(\alpha) = +\infty$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.
- [C] $\ell(\alpha)$ non esiste finito per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
- [X] $\ell(\alpha) = 0$ per ogni $\alpha > 1$.

ESERCIZIO 5. Si consideri l'equazione

$$|z|^2 - z^2 + 3i\,\overline{z} = 6i. \qquad \text{(E)}$$

Si ha:

- [X] L'equazione (E) ha due soluzioni.
- [B] L'equazione (E) ha una sola soluzione.
- [C] L'equazione (E) non ha soluzioni reali.
- [D] L'equazione (E) ha infinite soluzioni.

ESERCIZIO 6. Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- [A] Se f ammette massimo e minimo assoluto, allora $\text{Im}\,(f) = \left[\min f, \max f\right]$.
- [B] Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, allora $\text{Im}\,(f) = \mathbb{R}$.
- [C] Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, allora f ammette un punto di minimo o di massimo relativo.
- [X] Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$, allora f ammette un punto di minimo o di massimo relativo.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x}}$.

(i) Determinare il dominio

$$\mathrm{Dom}(f) = \left]-\infty, 0\right[\cup \left[1, +\infty\right[.$$

ed eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Asintoto verticale (unilatero, da destra): $x = 0$.

Asintoti obliqui (unilateri): $y = x$ per $x \to +\infty$.

$y = -x$ per $x \to -\infty$.

Non ci sono asintoti orizzontali.

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strett. cresc. su: $\left[-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right[$ e su $\left[1, +\infty\right[$.

Monotona strett. decresc. su: $\left]-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$.

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f.

Punto di minimo relativo: $x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Punto di minimo assoluto: $x = 1$.

Non ci sono punti di massimo (relativo od assoluto).

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa ed in quali intervalli è concava.

Convessa su: $\left]-\infty, 0\right[$.

Concava su: $\left[1, +\infty\right[$.

(v) Determinare eventuali punti di flesso di f.

Non ci sono punti di flesso.

(vi) Determinare l'immagine di f :

$$\mathrm{Im}(f) = \left[0, +\infty\right[.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.