IV APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2002/2003, 25 giugno 2003

d23137

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6
B	C	A	D	B	D

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Determinare (se esiste) il limite della successione

$$\ell \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n} + \sqrt{n} + (-1)^n}{n^2 + \ln(1/n^3)}\,.$$

Si ha:

A $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B (X) $\ell = 0$.

C $\ell = -\infty$.

D ℓ non esiste.

ESERCIZIO 2. Fissati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \beta x & \text{se} \quad x > \alpha\,, \\ \dfrac{x^2}{2} + 2 & \text{se} \quad x \le \alpha\,. \end{cases}$$

Si ha:

A Esiste una sola coppia di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tale che $f_{\alpha,\beta}$ è continua.

B Non esiste $\alpha \in \mathbb{R}$, tale che $f_{\alpha,\alpha}$ (con $\beta = \alpha$) è continua.

C (X) Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, esiste $\beta \in \mathbb{R}$, tale che $f_{\alpha,\beta}$ è continua.

D Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, esiste $\beta \in \mathbb{R}$, tale che $f_{\alpha,\beta}$ è continua.

ESERCIZIO 3. Calcolare il valore dell'integrale $I = \displaystyle\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

[X] $I = 2$.

B $I = 0$.

C $I = -3$.

D $I = 3e$.

ESERCIZIO 4. Data una funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ che ammette limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

A f è superiormente limitata.

B Se $f(0) > 0$, allora f ha almeno uno zero nel suo dominio.

C Se f è decrescente, allora $\mathrm{Im}(f) = [f(0), -\infty[$.

[X] Se f è continua, allora f ammette massimo assoluto.

ESERCIZIO 5. Siano z_1, z_2 le due soluzioni (complesse) dell'equazione $4z^2 + 3iz - i = 0$. Si ha:

A $|z_1\, z_2| = i/4$.

[X] $|z_1\, z_2| = 1/4$.

C $|z_1\, z_2| = 1/16$.

D $|z_1\, z_2| = \sqrt{145}/32$.

ESERCIZIO 6. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x > 0$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{y}{3} + 1\right), \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Determinare l'insieme $I \doteq \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \;:\; \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \varphi(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$.

A $I =]-\infty, -1/3]$.

B $I = \emptyset$.

C $I =]-\infty, 0]$.

[X] $I = \{-1/3\}$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = x^{(1-\ln x)}$.

(i) Determinare il dominio naturale di f:

$$\mathrm{Dom}(f) = \left]0,\, +\infty\right[$$

(ii) Determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali ed obliqui).

Asintoto orizzontale: $y = 0$.

Non ci sono asintoti verticali od obliqui.

(iii) Stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $x = 0$.

Sì, ponendo $f(0) \doteq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona crescente su: $\left]0,\, \sqrt{e}\right]$.

Monotona decrescente su: $\left[\sqrt{e},\, +\infty\right[$.

(v) Determinare evntuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f:

Punto di massimo assoluto: $x = \sqrt{e}$.

Non ci sono punti di minimo (relativo od assoluto).

(vi) Determinare l'immagine di f:

$$\mathrm{Im}(f) = \left]0,\, \sqrt[4]{e}\right].$$

(vii) Tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

(i) Determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Asintoto orizzontale (unilatero, per $x \to +\infty$): $y = 0$.

Asintoto verticale (bilatero): $x = 0$.

Non ci sono asintoti obliqui.

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona crescente su: $\big] -\infty, -1 \big]$.

Monotona decrescente su: $\big[-1, 0 \big[$ e su $\big] 0, +\infty \big[$.

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f.

Punto di massimo relativo: $x = -1$.

Non ci sono punti di minimo (relativo od assoluto).

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa ed in quali intervalli è concava.

Convessa su: $\big] 0, +\infty \big[$.

Concava su: $\big] -\infty, 0 \big[$.

(v) Determinare eventuali punti di flesso di f.

Non ci sono punti di flesso.

(vi) Tracciare il grafico probabile della funzione.