

IV APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 28 Giugno 2004

i37690

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
C	C	D	B	B	D

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi_\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = x \sin x (y + 1), \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(x)$. Allora si ha:

- ☐ A Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ell(\alpha)$ non esiste.
- ☐ B Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(\alpha) = 0$.
- ☒ C Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(\alpha) = -1$.
- ☐ D Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(\alpha) = +\infty$.

ESERCIZIO 2. Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (e^{t^2} + 1) dt}{e^{2x^2}}$$

(Si suggerisce di utilizzare la formula di de l'Hôpital). Si ha:

- ☐ A $\ell = +\infty$.
- ☐ B $\ell = \frac{1}{4}$.
- ☒ C $\ell = 0$.
- ☐ D $\ell = 1$.

ESERCIZIO 3. Data una funzione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A Se f ammette un asintoto obliquo, ed è derivabile, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = +\infty$.
- ☐ B Se f ammette un asintoto orizzontale, allora f è limitata.
- ☐ C Se f ammette un asintoto obliquo, allora f non ha nè massimo nè minimo assoluto.
- ☒ D Se f ammette massimo e minimo assoluto, allora f non ha nè asintoti obliqui nè asintoti verticali.

ESERCIZIO 4. Si consideri l'equazione

$$4(z - |z|^2) + \bar{z} = 1. \quad (\text{E})$$

Si ha:

- ☐ A L'equazione (E) ha infinite soluzioni.
- ☒ B L'equazione (E) ha due soluzioni.
- ☐ C L'equazione (E) non ha soluzioni.
- ☐ D Tutte le soluzioni dell'equazione (E) hanno parte immaginaria non nulla.

ESERCIZIO 5. Data una funzione derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con derivata pari ed ovunque diversa da zero, si consideri la funzione composta $g(x) = f(\cos x + \sin x)$, e se ne calcoli la derivata nei punti $x = 0, \pi/2, \pi$. Si ha:

- ☐ A $g'(\pi) - g'(0) = 0$.
- ☒ B $g'(\pi) + g'(0) = 0$.
- ☐ C $g'(\pi/2) + g'(\pi) = 0$.
- ☐ D $g'(\pi/2) - g'(0) = 0$.

ESERCIZIO 6. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare (se esiste) il limite della successione

$$\ell(\alpha) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + \cos n)^\alpha}{\sin \frac{1}{n}}.$$

Si ha:

- ☐ A Per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ell(\alpha)$ non esiste.
- ☐ B $\ell(\alpha)$ esiste finito per ogni $\alpha < 0$.
- ☐ C $\ell(\alpha) = +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ☒ D $\ell(\alpha) = 0$ per ogni $\alpha < -1$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \frac{(x^2 - 2x - 15) e^x}{|x^2 - 1|}$.

- (i) Determinare il dominio naturale di f :

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

- (ii) Determinare eventuali intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x : \quad x = -3, 5.$$

$$\text{asse } y : \quad y = -15.$$

- (iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} =]-\infty, -3] \cup [5, +\infty[.$$

- (iv) Determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui.

$$\text{Asintoto orizzontale (unilatero): } y = 0 \quad (\text{per } x \rightarrow -\infty).$$

$$\text{Asintoti verticali (bilateri): } x = -1, x = 1.$$

Non ci sono asintoti obliqui.

- (v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = x \ln \left(\frac{1}{x} \right)$.

- (i) Determinare il dominio

$$\text{Dom}(f) =]0, +\infty[.$$

ed eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Non ci sono asintoti orizzontali, verticali od obliqui.

- (ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strettamente crescente su: $]0, e^{-1}]$,

Monotona strettamente decrescente su: $[e^{-1}, +\infty[$.

- (iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

Punto di massimo assoluto: $x = e^{-1}$.

Non ci sono punti di minimo (relativo od assoluto).

- (iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

Concava in tutto il dominio.

- (v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =]-\infty, e^{-1}].$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.