V APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2002/2003, 25 luglio 2003

d23137

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

1	2	3	4	5	6
D	B	D	A	B	D

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.*

ESERCIZIO 1. La successione di termine generale $a_n = \left(\dfrac{1}{5+\sin n}\right)^n$ è :

A illimitata.

B irregolare.

C convergente a $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

~~D~~ infinitesima.

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Si ha:

A f non è continua in $x_0 = 0$.

~~B~~ Non esiste $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

C f non è derivabile in $x_0 = 0$.

D $x_0 = 0$ non è punto di minimo di f.

ESERCIZIO 3. Calcolare il valore dell'integrale $I = \displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e^2} \frac{dx}{x\,(\ln x)^4}$.

☐ A $\quad I = 0$.

☐ B $\quad I = 65/8$.

☐ C $\quad I = -1/24$.

☒ D $\quad I = 21/8$.

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \arctan x + \frac{1}{1+x^2} \qquad x \leq 0\,.$$

Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

☒ A $\quad \exists\, \bar{x} < 0$ tale che $\{x \leq 0 \,:\, f(x) \geq 0\} = [\bar{x}, 0]$.

☐ B $\quad \exists\, \bar{x} < 0$ tale che $\{x \leq 0 \,:\, f(x) \geq 0\} =]-\infty, \bar{x}]$.

☐ C $\quad \exists\, \bar{x}_1, \bar{x}_2 < 0$ tale che $\{x \leq 0 \,:\, f(x) \geq 0\} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$.

☐ D $\quad f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \leq 0$.

ESERCIZIO 5. Calcolare il modulo dei numeri complessi $z_1 = \dfrac{(3+\sqrt{7}i)^3}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$, $\quad z_2 = \dfrac{3+\sqrt{7}i}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^7}$.
Si ha.

☐ A $\quad |z_1| = 4\,|z_2|^{-1}$.

☒ B $\quad |z_1| = |z_2|^{-1}$.

☐ C $\quad |z_1| = 6\,|z_2|$.

☐ D $\quad |z_1|^2 = 3\,|z_2|^{-1}$.

ESERCIZIO 6. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x;\,\alpha)$, $x > 0$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{\ln x}{x}(y-2)\,, \\ y(1) = \alpha\,. \end{cases}$$

Si ha:

☐ A $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x;\,\alpha)$ esiste finito $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

☐ B $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x;\,\alpha) = +\infty \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

☐ C $\quad$ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x;\,\alpha) = 0$.

☒ D $\quad$ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x;\,\alpha) = 2$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = e^x \arctan|x|$.

(i) Determinare il dominio naturale e l'insieme di positività di f:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\{f \geq 0\} = \mathbb{R}.$$

(ii) Determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali ed obliqui).

Asintoto orizzontale (unilatero, per $x \to -\infty$): $y = 0$.

Non ci sono asintoti verticali od obliqui.

(iii) Determinare eventuali punti singolari.

Punto singolare: $x = 0$.

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente (non occorre determinare il valore esatto degli estremi degli intervalli di monotonia).

Monotona crescente su: $\left] -\infty, \bar{x} \right]$ e su $\left[0, +\infty\right[$,

Monotona decrescente su: $\left[\bar{x}, 0\right]$,

dove $\bar{x}$ è l'unico zero di $g(x) = \arctan x + \dfrac{1}{1+x^2}$ su $\left] -\infty, 0\right]$.

(v) Stabilire se ammette eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto (non occorre determinare il valore esatto degli eventuali punti di massimo):

Punto di massimo relativo: $x = \bar{x}$.

Punto di minimo assoluto: $x = 0$.

(vi) Determinare l'immagine di f:

$$\mathrm{Im}(f) = \left[0, +\infty\right[.$$

(vii) Tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^{2t}}$.

(i) Determinare il dominio naturale e l'insieme di positività di f:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\{f \geq 0\} = [0, +\infty[\,.$$

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona crescente su: $\mathbb{R}$.

(iii) Determinare l'immagine di f:

$$\mathrm{Im}(f) = \left]-\pi/4,\ \pi/4\right[\,.$$

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa ed in quali intervalli è concava.

Convessa su: $\left]-\infty, 0\right[$.

Concava su: $\left]0, +\infty\right[$.

(v) Determinare eventuali punti di flesso di f.

Punto di flesso: $x = 0$.

(vi) Tracciare il grafico probabile della funzione.