V APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 12 Luglio 2004

a21398

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6
C	D	A	C	D	C

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Sia $x \mapsto \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -7y + e^{3x}, \\ y(0) = \frac{11}{10}, \end{cases}$$

e, per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x}\varphi(x)$. Allora si ha:

$\boxed{\text{A}}$ Non esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(\alpha) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\boxed{\text{B}}$ Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ell(\alpha) = +\infty$.

$\boxed{\cancel{\text{C}}}$ Per ogni $\alpha > 0$, $\ell(\alpha) = +\infty$.

$\boxed{\text{D}}$ Per ogni $\alpha \leq -3$, $\ell(\alpha) = 0$.

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione $f(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} \frac{e^{2t}}{t}\,dt$, $x > 1$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ La funzione f è derivabile per ogni $x > 1$, e si ha $f'(x) = \frac{x^2}{\ln x} - e^2$.

$\boxed{\text{B}}$ La funzione f è derivabile per ogni $x > 1$, e si ha $\lim_{x\to1^+} f'(x) = -\infty$.

$\boxed{\text{C}}$ Esiste $x_0 > 1$ tale che $f'(x_0) = 0$.

$\boxed{\cancel{\text{D}}}$ La funzione f è crescente.

ESERCIZIO 3. Fissati $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha x}}{\beta} & \text{se} \quad x \leq 0\,, \\ \\ \dfrac{x}{\beta} + \alpha & \text{se} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Si ha:

☒ Esiste una sola coppia di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui $f_{\alpha,\beta}$ è continua e derivabile.

B Esiste più di una coppia di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui $f_{\alpha,\beta}$ è continua e derivabile.

C Non esistono coppie di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui $f_{\alpha,\beta}$ è continua e derivabile.

D Esiste una coppia di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha \neq \beta$, per cui $f_{\alpha,\beta}$ è continua e derivabile.

ESERCIZIO 4. Calcolare il modulo dei numeri complessi $z_1 = \dfrac{(8+\sqrt{17}i)^4}{\sqrt{5}-2i}$, $z_2 = \dfrac{\sqrt{5}-2i}{(8+\sqrt{17}i)^3}$.
Si ha:

A $|z_1| = 9|z_2|$.

B $|z_1||z_2|^2 = 3$.

☒ $|z_1|^5 = \dfrac{1}{|z_2|^7}$.

D $|z_1 z_2| = 3$.

ESERCIZIO 5. Data una funzione $f : [-1,\, 1] \to [0,\, +\infty[$, tale che $f(1) = 0$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta:

A Se f è continua su $[-1,\, 0\,[$, e $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, allora $\mathrm{Im}(f) = [0,\, +\infty[$.

B Se f è continua su $]-1,\, 1[$, ed $M = \max f$, allora $\mathrm{Im}(f) = [0,\, M]$.

C Se f è pari e continua su $]0,\, 1]$, allora f è continua su $[-1,\, 1]$.

☒ Se f è continua su $]0,\, 1]$, e $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, allora $\mathrm{Im}(f) = [0,\, +\infty[$.

ESERCIZIO 6. Calcolare (se esiste) il limite

$$\ell \doteq \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Si ha:

A $\ell = 0$.

B $\ell = -\infty$.

☒ $\ell = \frac{1}{2}$.

D Il limite ℓ non esiste.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}} \cdot \dfrac{x-3}{|x-3|}$.

(i) Determinare il dominio naturale di f:

$$\mathrm{Dom}(f) =]1,\, 3[\cup]3,\, +\infty[\,.$$

(ii) Determinare eventuali intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

asse x : $\qquad x = 2.$

Non ci sono intersezioni con l'asse y.

(iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} =]1,\, 2] \cup]3,\, +\infty[\,.$$

(iv) Determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui.

Asintoto orizzontale (unilatero): $\quad y = 0 \quad$ (per $\quad x \to +\infty$) .

Asintoto verticale (unilatero): $\quad x = 1 \quad$ (per $\quad x \to 1^+$) .

Non ci sono asintoti obliqui .

(v) Determinare l'intersezione dell'immagine di f con la semiretta $[0,\, +\infty[$:

$$\mathrm{Im}(f) \cap [0,\, +\infty[= [0,\, +\infty[\,.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = x^3 e^{-x^2}$.

(i) Determinare il dominio

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

ed eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

$$\text{Asintoto orizzontale (bilatero):} \quad y = 0\,.$$

$$\text{Non ci sono asintoti verticali od obliqui}\,.$$

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$$\text{Monotona strettamente crescente su:} \quad \left[-\sqrt{3/2},\, \sqrt{3/2}\,\right],$$

$$\text{Monotona strettamente decrescente su:} \quad \left]-\infty,\, -\sqrt{3/2}\right] \quad \text{e su} \quad \left[\sqrt{3/2},\, +\infty\right[.$$

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f.

$$\text{Punto di massimo assoluto:} \qquad x = \sqrt{3/2}\,.$$

$$\text{Punto di minimo assoluto:} \qquad x = -\sqrt{3/2}\,.$$

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

$$\text{Convessa su:} \quad \left[-\sqrt{3},\, -\sqrt{2}/2\,\right] \quad \text{su} \quad \left[0,\, \sqrt{2}/2\right] \quad \text{e su} \quad \left[\sqrt{3},\, +\infty\right[,$$

$$\text{Concava su:} \quad \left]-\infty,\, -\sqrt{3}\right] \quad \text{su} \quad \left[-\sqrt{2}/2,\, 0\right] \quad \text{e su} \quad \left[\sqrt{2}/2,\, \sqrt{3}\right].$$

(v) Determinare l'immagine di f :

$$\mathrm{Im}(f) = \left[-\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}},\, \left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}\,\right].$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.