

VI APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2002/2003, 10 settembre 2003

d59837

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
C	D	A	B	D	C

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Calcolare (se esiste) il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x \right).$$

☐ A $\ell = +\infty$.

☐ B $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

☒ C $\ell = 0$.

☐ D Il limite ℓ non esiste.

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \ln(1+t) \, dt & \text{se } x \geq 0, \\ \int_0^x \tan t \, dt & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si ha:

☐ A f non è continua in $x_0 = 0$.

☐ B f non è derivabile in $x_0 = 0$.

☐ C f è derivabile in $x_0 = 0$, e $f'(0) \neq 0$.

☒ D f è derivabile in $x_0 = 0$, e $f'(0) = 0$.

ESERCIZIO 3. Calcolare il valore dell'integrale $I = \int_{-1}^0 e^{\sqrt{x+1}} dx$.

☒ $I = 2$.

☐ $I = 1$.

☐ $I = 4e^{-1} - 2$.

☐ $I = 0$.

ESERCIZIO 4. Per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi(x; \alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \sin x(3 - y), \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x; \alpha)$. Si ha:

☐ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(\alpha) = +\infty$.

☒ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(\alpha) = 3$.

☐ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\ell(\alpha) = 0$.

☐ Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ell(\alpha)$ non esiste.

ESERCIZIO 5. Siano z_0, z_1, z_2, z_3 le soluzioni (complesse) dell'equazione $z^4 = 4 + 3i$. Si ha.

☐ $|z_0| + |z_1| + |z_2| + |z_3| = 2\sqrt{5}$.

☐ $|z_0 z_1 z_2 z_3| = 625$.

☐ $|z_0 z_1 z_2 z_3| = 25$.

☒ $|z_0| + |z_1| + |z_2| + |z_3| = 4\sqrt[4]{5}$.

ESERCIZIO 6. Data una funzione continua $f :]-\infty, -1] \cup [0, 1/2[\cup]1/2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

☐ Se $f(0) = -1$ e $f(1) = 1/2$, allora f ha almeno uno zero nel suo dominio.

☐ Se $f(0) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, allora f ha almeno uno zero nel suo dominio.

☒ Se $f(-1) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) < 0$, allora f ha almeno uno zero nel suo dominio.

☐ Se $\left(\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) \right) < 0$, allora f ha almeno uno zero nel suo dominio.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x - 1$.

- (i) Determinare il dominio naturale e l'insieme di positività di f :

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

$$\{f \geq 0\} =]-\infty, 0].$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali ed obliqui).

$$\text{Asintoto orizzontale (unilatero): } y = -1 \quad (\text{per } x \rightarrow +\infty).$$

$$\text{Asintoto obliquo (unilatero): } y = -2x - 1 \quad (\text{per } x \rightarrow -\infty).$$

Non ci sono asintoti verticali.

- (iii) Determinare eventuali punti singolari.

Non ci sono punti singolari.

- (iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona decrescente su: $\mathbb{R}$.

- (v) Stabilire se ammette eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto:

Non ci sono punti di massimo o di minimo (relativo od assoluto).

- (vi) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =] -1, +\infty [.$$

- (vii) Tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x) = e^{\arctan x}$.

(i) Determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali ed obliqui) di f .

$$\begin{aligned}\text{Asintoti orizzontali (unilateri):} \quad & y = e^{\pi/2} \quad (\text{per } x \rightarrow +\infty), \\ & y = e^{-\pi/2} \quad (\text{per } x \rightarrow -\infty).\end{aligned}$$

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

(iii) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =]e^{-\pi/2}, e^{\pi/2}[.$$

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa ed in quali intervalli è concava.

$$\text{Convessa su:} \quad]-\infty, 1/2[.$$

$$\text{Concava su:} \quad]1/2, +\infty[.$$

(v) Determinare eventuali punti di flesso di f .

$$\text{Punto di flesso:} \quad x = 1/2.$$

(vi) Tracciare il grafico probabile della funzione.