

# VI APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LA

Ing. Informatica (G-Z) ed Elettronica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 3 Settembre 2004

a21398

COGNOME E NOME: .....

MATRICOLA: .....

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| D | C | A | B | B | C |

**N.B.** Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

**ESERCIZIO 1.** Per ogni fissato  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sia  $x \mapsto \varphi_\alpha(x)$ ,  $x < 1$ , la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{2y}{x-1} + (x-1)^2 e^x, \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

e si consideri il limite  $\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_\alpha(x)$ . Allora si ha:

- ☐ A Esiste  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che  $\ell(\alpha) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- ☐ B Per ogni  $\alpha < 1$ ,  $\ell(\alpha) = +\infty$ .
- ☐ C Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\ell(\alpha) \neq 0$ .
- ☒ D Esiste  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tale che  $\ell(\alpha) = 0$ .

**ESERCIZIO 2.** Calcolare il valore dell'integrale  $I = \int_0^2 |x(e^x - e)| dx$ .

- ☐ A  $I = e^2 - 2e + 1$ .
- ☐ B  $I = 1 + 2e + e^2$ .
- ☒ C  $I = e^2 - e - 1$ .
- ☐ D  $I = -1 - e^2$ .

**ESERCIZIO 3.** Per ogni fissato  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si consideri la funzione  $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{\pi}{2} + \arctan x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☒ **A** Esiste  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui la funzione  $f_\alpha$  ha un punto di minimo assoluto.
- ☐ **B** Esiste  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui la funzione  $f_\alpha$  ha un punto di massimo assoluto.
- ☐ **C** Per qualunque  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione  $f_\alpha$  è monotona crescente.
- ☐ **D** Esiste  $\alpha \in \mathbb{R}$  per cui la funzione  $f_\alpha$  è monotona decrescente.

**ESERCIZIO 4.** Calcolare il modulo ed un argomento del numero complesso  $z = \frac{(1+i)^5}{\sqrt{3}-i}$ . Si ha:

- ☐ **A**  $|z| = 4\sqrt{2}$ ,  $\arg(z) = -\frac{7\pi}{12}$ .
- ☒ **B**  $|z| = 2\sqrt{2}$ ,  $\arg(z) = \frac{17\pi}{12}$ .
- ☐ **C**  $|z| = 2\sqrt{2}$ ,  $\arg(z) = \frac{13\pi}{12}$ .
- ☐ **D**  $|z| = 2\sqrt{2}$ ,  $\arg(z) = \frac{7\pi}{12}$ .

**ESERCIZIO 5.** Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , determinare (se esiste) il limite della successione

$$\ell(\alpha) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n^\alpha} - n}{n^2 + 3n}.$$

Si ha:

- ☐ **A**  $\ell(\alpha) = +\infty$  per qualche  $\alpha \in ]3, 4[$ .
- ☒ **B**  $\ell(\alpha) = +\infty$  per ogni  $\alpha > 4$ .
- ☐ **C**  $\ell(\alpha)$  esiste finito per qualche  $\alpha > 4$ .
- ☐ **D**  $\ell(\alpha) = 0$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**ESERCIZIO 6.** Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^t - 1}{t} dt}{\sqrt{x}}$$

(si suggerisce di utilizzare la formula di de l'Hôpital). Si ha:

- ☐ **A**  $\ell = +\infty$ .
- ☐ **B**  $\ell = 0$ .
- ☒ **C**  $\ell = 1$ .
- ☐ **D**  $\ell = \frac{1}{2}$ .

**ESERCIZIO 7.** Si consideri la funzione definita da  $f(x) = \ln \left| \frac{3}{2} e^{-x} - e^{-2x} \right|$ .

- (i) Determinare il dominio naturale di  $f$ :

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \ln \left( \frac{2}{3} \right) \right\}.$$

- (ii) Determinare eventuali intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\text{asse } x : \quad x = -\ln 2.$$

$$\text{asse } y : \quad y = -\ln 2.$$

- (iii) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività:

$$\{f \geq 0\} = ]-\infty, -\ln 2].$$

- (iv) Determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui.

$$\text{Asintoto verticale (unilatero):} \quad x = \ln \left( \frac{2}{3} \right).$$

$$\text{Asintoti obliqui (unilateri):} \quad y = -x + \ln \left( \frac{3}{2} \right) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

$$y = -2x \quad \text{per } x \rightarrow -\infty.$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

- (v) Determinare l'immagine di  $f$ :

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

**ESERCIZIO 8.** Si consideri la funzione definita da  $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x^2}$ .

(i) Determinare il dominio

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

ed eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

Asintoto orizzontale (bilatero):  $y = 0$ .

Asintoto verticale (bilatero):  $x = 0$ .

Non ci sono asintoti obliqui.

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

Monotona strettamente decrescente su:  $[-\sqrt{e}, 0[$  e su  $[\sqrt{e}, +\infty[$ ,

Monotona strettamente crescente su:  $] -\infty, -\sqrt{e}]$  e su  $] 0, \sqrt{e}]$ .

(iii) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di  $f$ .

Punti di massimo assoluto:  $x = -\sqrt{e}$ ,  $x = \sqrt{e}$ .

Non ci sono punti di minimo (relativo od assoluto).

(iv) Stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

Convessa su:  $] -\infty, -e^{\frac{5}{6}}]$  e su  $[e^{\frac{5}{6}}, +\infty[$ ,

Concava su:  $[-e^{\frac{5}{6}}, 0[$  e su  $] 0, e^{\frac{5}{6}}]$ .

(v) Determinare l'immagine di  $f$  :

$$\text{Im}(f) = ] -\infty, e^{-1}] .$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.