

VI APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 10 dicembre 2004

c53171

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
B	C	C	D	D	C

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale $-1/2$, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Data una funzione derivabile $f : D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \neq x + \frac{1}{x}\} \rightarrow \mathbb{R}$, con derivate parziali ovunque nulle, e tale che $f(0, 0) = 0$, stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A $f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D.$
- ☒ B $f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{t.c.} \quad xy \leq 0.$
- ☐ C $f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{t.c.} \quad xy \geq 0.$
- ☐ D $\exists x \neq 0 \quad \text{tale che} \quad f(x, x) \neq 0.$

ESERCIZIO 2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A Per ogni $\alpha \in]0, 1[$ la serie non è convergente.
- ☐ B Esiste $\alpha \leq 0$ per cui la serie è convergente.
- ☒ C La serie è convergente per ogni $\alpha > 0.$
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 3. Data la funzione $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, e la curva parametrica $\vec{r}(t) = (3e^t, 4e^t)$, $t < 0$, si consideri la funzione composta $\phi(t) = f(\vec{r}(t))$, $t < 0$, e se ne calcoli la derivata. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi'(t) = -\infty$.
- ☐ B $\exists t < 0$ per cui si ha $\phi'(t) = 0$.
- ☒ C $\lim_{t \rightarrow 0^-} \phi'(t) = -\infty$.
- ☐ D $\phi'(t) \geq 0$ per ogni $t < 0$.

ESERCIZIO 4. Si consideri la regione

$$D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \leq \sqrt{3}x\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I \doteq \iint_D \frac{x}{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

Si ha.

- ☐ A $I = \frac{3\sqrt{3}}{4} \pi$.
- ☐ B $I = 0$.
- ☐ C $I = -\sqrt{3} \pi^2$.
- ☒ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 5. Sia $x \mapsto \varphi(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{xy}{\ln y}, \\ y(1) = e^2. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$.
- ☐ B φ è una funzione limitata.
- ☐ C φ non è definita su tutto $\mathbb{R}$.
- ☒ D $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$.

ESERCIZIO 6. Determinare per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \cos(x^2)}{x^\alpha} dx.$$

- ☐ A Per ogni $\alpha \in]1, \frac{5}{2}[$.
- ☐ B Per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$.
- ☒ C Per ogni $\alpha < 1$.
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 7. Si consideri la curva parametrica $\vec{r} : [0, 1 + \pi + e^\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (e^t \cos t, e^t \sin t) & \text{se } t \in [0, \pi], \\ (t - \pi - e^\pi, 0) & \text{se } t \in]\pi, 1 + \pi + e^\pi]. \end{cases}$$

- (i) Determinare eventuali punti di discontinuità di $\vec{r}$ e stabilire se è una curva chiusa.

$\vec{r}$ è una curva continua e chiusa.

- (ii) Determinare eventuali punti di intersezione della curva $\vec{r}$ con gli assi cartesiani e tracciare la traiettoria probabile della curva.

$$\text{asse } x : \quad x \in [-e^\pi, 1].$$

$$\text{asse } y : \quad y = 0, \quad y = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

- (iii) Determinare i punti regolari della curva $\vec{r}$.

I punti non regolari di $\vec{r}$ sono:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}(1 + \pi + e^\pi) = (1, 0), \quad \vec{r}(\pi) = (-e^\pi, 0).$$

- (iv) Nel caso $\vec{r}$ sia una curva chiusa, calcolare l'area $A(\vec{r})$ della regione delimitata da $\vec{r}$.

$$A(\vec{r}) = \frac{e^{2\pi} - 1}{4}.$$

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = \ln(1 - xy)$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f .

Unico punto critico: $(0, 0)$.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f .

Punto di sella: $(0, 0)$.

(iii) Determinare l'immagine della restrizione di f alla circonferenza unitaria

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$f(S_1) = \left[\ln \frac{1}{2}, \ln \frac{3}{2} \right].$$

(iv) Determinare l'immagine di f .

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$