

VI APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2002/2003, 20 gennaio 2004

s36513

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
A	C	D	A	B	D

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Si consideri la funzione $f(x, y) = \exp\left(\frac{1}{(x^2 + y^2)}\right)$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

☒ $2f(x, y) + (x^2 + y^2)(x f_x(x, y) + y f_y(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$

☐ $f(x, y) - (x f_x(x, y) + y f_y(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$

☐ Esiste $(x, y) \neq (0, 0)$ per cui $x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = 0$.

☐ Esiste $(x, y) \neq (0, 0)$ per cui $(x^2 + y^2)(x f_x(x, y) + y f_y(x, y)) = 0$.

ESERCIZIO 2. Sia $R > 1$, si consideri la regione

$$D_R \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I(R) \doteq \iint_{D_R} \exp\left(\frac{1}{(x^2 + y^2)}\right) \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Determinare il limite $\ell \doteq \lim_{R \rightarrow +\infty} I(R)$.

☐ $\ell = +\infty$.

☐ $\ell = (1 - e) 2\pi$.

☒ $\ell = (e - 1) \pi$.

☐ $\ell = 0$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la curva parametrica γ di equazione $x(t) = 3 \cos t$, $y(t) = 2 \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, e si calcoli l'integrale curvilineo (di prima specie) $I \doteq \int_{\gamma} xy \, ds$. Si ha:

☐ A $I = \frac{27}{5}$.

☐ B $I = -\frac{19}{5}$.

☐ C $I = 0$.

☒ D $I = \frac{38}{5}$.

ESERCIZIO 4. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{1}{n^\alpha} \right), \quad \alpha > 0$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

☒ A La serie è assolutamente convergente per ogni $\alpha > 1$.

☐ B La serie è convergente per ogni $\alpha > 0$.

☐ C Esiste $\alpha \in]0, 1[$ per cui la serie è convergente.

☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 5. Calcolare l'area A della regione delimitata dalla curva parametrica chiusa

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (t^2(1-t), 1 + \ln t - \frac{1}{t}) & \text{se } t \in [1, 3], \\ (0, \frac{11}{3} + \ln 3 - t) & \text{se } t \in [3, \frac{11}{3} + \ln 3]. \end{cases}$$

☐ A $A = 20$.

☒ B $A = -\frac{20}{3}$.

☐ C $A = -5$.

☐ D $A = -\frac{17}{3}$.

ESERCIZIO 6. Sia $t \mapsto \varphi(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{y} + 4y = \cos t, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Si ha:

☐ A $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

☐ B $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$.

☐ C $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

☒ D $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = \frac{xy}{1 - x^2 - y^2}$.

(i) Determinare il dominio naturale di f .

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}.$$

(ii) Determinare eventuali punti critici di f e stabilirne la natura.

Unico punto critico: $(0, 0)$ è punto di sella.

(iii) Calcolare (se esistono) i seguenti limiti

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(x, y) = +\infty.$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(x, y) = -\infty.$$

(iv) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = \exp\left(\frac{1}{(x^2 + y^2)}\right)$.

- (i) Determinare il dominio naturale di f ed eventuali punti critici liberi di f .

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

La funzione non ha punti critici liberi.

- (ii) Si consideri l'insieme $A = \{(x, y) \in \text{Dom}(f) : x^2 + y^2 \leq 1, (x - 2)^2 + y^2 \leq 4\}$, e se ne descriva la frontiera ∂A .

$$\begin{aligned}\partial A &= B_1 \cup B_2, & B_1 &\doteq \{(x, y) \in \text{Dom}(f) : x = \sqrt{1 - y^2}, |y| \leq \sqrt{15}/4\}, \\ & & B_2 &\doteq \{(x, y) \in \text{Dom}(f) : x = 2 - \sqrt{4 - y^2}, |y| < \sqrt{15}/4\}.\end{aligned}$$

- (iii) Determinare l'immagine dell'insieme $\partial A \setminus (0, 0)$ tramite f :

$$f(\partial A \setminus (0, 0)) = [e, +\infty[.$$

- (iv) Determinare l'immagine dell'insieme A tramite f :

$$f(A) = [e, +\infty[.$$

- (v) Stabilire quali sono i punti (x_0, y_0) regolari dell'insieme di livello di f

$$E_e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = e\}.$$

(E_e si può rappresentare in un intorno di (x_0, y_0) come grafico cartesiano di una funzione).

Tutti i punti dell'insieme di livello E_e sono regolari.