

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2002/2003, 20 marzo 2003

d32139

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
D	C	A	A	B	C

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Si consideri la curva parametrica γ di equazione $x(t) = t + \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi]$, e si calcoli l'integrale curvilineo (di prima specie) $I \doteq \int_{\gamma} \sqrt{1 - y^2} \, ds$. Si ha:

☐ A $I = 2\sqrt{2}$.

☐ B $I = \frac{2}{3}$.

☐ C $I = 0$.

☒ D $I = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

ESERCIZIO 2. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la curva parametrica chiusa

$$\vec{r}_{\alpha}(t) = \begin{cases} (\cos t + \alpha t, \sin t) & \text{se } t \in [0, 2\pi], \\ (1 + (4\pi - t)\alpha, 0) & \text{se } t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

Determinare l'area (orientata) $A(\alpha)$ della regione delimitata da $\vec{r}_{\alpha}$.

☐ A $A(\alpha) = \pi(\alpha + \pi) \quad \forall \alpha$.

☐ B $A(\alpha) = 2\alpha\pi^2 \quad \forall \alpha$.

☒ C $A(\alpha) = \pi \quad \forall \alpha$.

☐ D $A(\alpha) = \pi(2 + \alpha) \quad \forall \alpha$.

ESERCIZIO 3. Data una funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \int_x^{\tan y} \varphi(t) dt$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☒ $f_x(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{4} f_y(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}) = 0$.
- ☐ $f_x(x, 0) + f_y(x, 0) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ $2f_x(x, \frac{\pi}{4}) + f_y(x, \frac{\pi}{4}) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ $f_x(0, y) + f_y(0, y) \neq 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $t \mapsto \varphi_\alpha(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 5e^{2t}, \quad y(0) = 6/5, \quad \dot{y}(0) = \alpha.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☒ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si ha $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{3t} \varphi_\alpha(t) = 1$.
- ☐ Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{3t} \varphi_\alpha(t) = -\infty$.
- ☐ Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{3t} \varphi_\alpha(t)$ esiste finito.
- ☐ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} \varphi_\alpha(t) = 0$.

ESERCIZIO 5. Fissati $\alpha \in \mathbb{R}$, $r > 0$, si consideri la regione

$$D_r \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I_\alpha(r) \doteq \iint_{D_r} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ $\lim_{r \rightarrow 0} I_1(r)$ esiste finito.
- ☒ Per ogni $\alpha < 1$ $\lim_{r \rightarrow 0} I_\alpha(r)$ esiste finito.
- ☐ Esiste $\alpha < 1$ per cui si ha $\lim_{r \rightarrow 0} I_\alpha(r) = +\infty$.
- ☐ Esiste $\alpha < 1$ per cui $\lim_{r \rightarrow 0} I_\alpha(r)$ esiste finito.

ESERCIZIO 6. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1 + 1/n)}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ Esiste $\alpha \leq 0$ per cui la serie è convergente.
- ☐ Per ogni $\alpha \in]0, 1[$ la serie non è convergente.
- ☒ Per ogni $\alpha > 0$ la serie è convergente.
- ☐ Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = xy e^{\left(\frac{y}{x+1}\right)}$.

- (i) Determinare il dominio naturale di f :

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -1\}.$$

- (ii) Stabilire se la funzione è prolungabile per continuità nel punto $(-1, 0)$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} f(x, y) \text{ non esiste e dunque } f \text{ non è prolungabile per continuità in } (-1, 0).$$

- (iii) L'immagine della funzione è (non occorre studiare i punti critici per rispondere a questo quesito):

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

- (iv) Determinare eventuali punti critici di f .

$$\text{Punti critici: } (0, 0), \quad (-1/2, -1/2).$$

- (v) Determinare la natura dei punti critici di f che si trovano nel semipiano $y > -x - 1$ (senza necessariamente effettuare lo studio della matrice Hessiana).

$$\text{Punto di minimo relativo (non era richiesto): } (-1/2, -1/2).$$

$$\text{Punto di sella: } (0, 0).$$

ESERCIZIO 8. Sia $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = 4x^2 + 3xy + 9y^2$ sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0\}$.

(i) Determinare eventuali punti critici vincolati di f e stabilirne la natura.

Punti critici vincolati: $(3/\sqrt{2}, \sqrt{2}), (3/\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-3/\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-3/\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(ii) L'immagine della funzione è:

$$\text{Im}(f) = [27, 45].$$

(iii) Stabilire quali punti (x_0, y_0) di A sono regolari (A si può rappresentare in un intorno di (x_0, y_0) come grafico cartesiano di una funzione).

Tutti i punti di A sono regolari.

(iv) Scrivere l'equazione della retta tangente ad A in uno dei suoi punti critici vincolati.

$$\text{Retta tangente ad } A \text{ in } (3/\sqrt{2}, \sqrt{2}): 12\sqrt{2}(x - 3/\sqrt{2}) + 18\sqrt{2}(y - \sqrt{2}) = 0.$$

(v) Determinare un vettore ortogonale ad A in uno dei suoi punti critici vincolati.

$$\text{Spazio normale ad } A \text{ in } (3/\sqrt{2}, \sqrt{2}): \{\lambda(2, 3) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$