

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2002/2003, 20 marzo 2003

d52189

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
B	D	C	C	D	A

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Si consideri la curva parametrica γ di equazione $x(t) = \cos t$, $y(t) = t + \sin t$, $t \in [0, \pi]$ e, dopo averne determinato la lunghezza L , se ne calcoli l'ascissa del baricentro $x_B \doteq \frac{1}{L} \int_{\gamma} x \, ds$. Si ha:

☐ A $x_B = \frac{4}{3}$.

☒ B $x_B = \frac{1}{3}$.

☐ C $x_B = \frac{\pi}{3}$.

☐ D $x_B = -\frac{2}{3}$.

ESERCIZIO 2. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la curva parametrica chiusa

$$\vec{r}_{\alpha}(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t + \alpha t) & \text{se } t \in [0, 2\pi], \\ (1, (4\pi - t)\alpha) & \text{se } t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

Determinare l'area (orientata) $A(\alpha)$ della regione delimitata da $\vec{r}_{\alpha}$.

☐ A $A(\alpha) = \pi(2 + \pi - \alpha) \quad \forall \alpha$.

☐ B $A(\alpha) = \alpha \pi^2 \quad \forall \alpha$.

☐ C $A(\alpha) = 2\pi(1 + \alpha) \quad \forall \alpha$.

☒ D $A(\alpha) = \pi(1 - 2\alpha) \quad \forall \alpha$.

ESERCIZIO 3. Data una funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \int_x^{\cos y} \varphi(t) dt$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A $f_x(x, \frac{\pi}{6}) - 2f_y(x, \frac{\pi}{6}) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ B $f_x(x, y) - f_y(x, y) \neq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}$.
- ☒ C $f_x(0, \frac{3\pi}{2}) + f_y(0, \frac{3\pi}{2}) = 0$.
- ☐ D $f_x(x, y) + f_y(x, y) \neq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 4. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $t \mapsto \varphi_\alpha(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 7e^{3t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = \alpha.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} \varphi_\alpha(t)$ esiste finito.
- ☐ B Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-2t} \varphi_\alpha(t) = +\infty$.
- ☒ C Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si ha $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-2t} \varphi_\alpha(t) = -7$.
- ☐ D Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-3t} \varphi_\alpha(t) = 0$.

ESERCIZIO 5. Fissati $\alpha \in \mathbb{R}$, $r > 0$, si consideri la regione

$$D_r \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq r^2\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I_\alpha(r) \doteq \iint_{D_r} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A Esiste $\alpha > 1$ per cui si ha $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_\alpha(r) = +\infty$.
- ☐ B $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_1(r)$ esiste finito.
- ☐ C Esiste $\alpha < 1$ per cui $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_\alpha(r)$ esiste finito.
- ☒ D Per ogni $\alpha > 1$ $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_\alpha(r)$ esiste finito.

ESERCIZIO 6. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{(\frac{1}{n})} - 1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☒ A Per ogni $\alpha > 0$ la serie è convergente.
- ☐ B Per ogni $\alpha \in]0, 1[$ la serie non è convergente.
- ☐ C Esiste $\alpha \leq 0$ per cui la serie è convergente.
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = xy e^{\left(\frac{x}{y-1}\right)}$.

- (i) Determinare il dominio naturale di f :

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 1\}.$$

- (ii) Stabilire se la funzione è prolungabile per continuità nel punto $(0, 1)$.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} f(x, y) \text{ non esiste e dunque } f \text{ non è prolungabile per continuità in } (0, 1).$$

- (iii) L'immagine della funzione è (non occorre studiare i punti critici per rispondere a questo quesito):

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

- (iv) Determinare eventuali punti critici di f .

$$\text{Punti critici: } (0, 0), \quad (1/2, 1/2).$$

- (v) Determinare la natura dei punti critici di f che si trovano nel semipiano $y < 1 - x$ (senza necessariamente effettuare lo studio della matrice Hessiana).

$$\text{Punto di massimo relativo (non era richiesto): } (1/2, 1/2).$$

$$\text{Punto di sella: } (0, 0).$$

ESERCIZIO 8. Sia $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = 16x^2 + 7xy + 25y^2$ sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0\}$.

(i) Determinare eventuali punti critici vincolati di f e stabilirne la natura.

Punti critici vincolati: $(5/\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (5/\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), (-5/\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (-5/\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

(ii) L'immagine della funzione è:

$$\text{Im}(f) = [330, 470] .$$

(iii) Stabilire quali punti (x_0, y_0) di A sono regolari (A si può rappresentare in un intorno di (x_0, y_0) come grafico cartesiano di una funzione).

Tutti i punti di A sono regolari.

(iv) Scrivere l'equazione della retta tangente ad A in uno dei suoi punti critici vincolati.

$$\text{Retta tangente ad } A \text{ in } (5/\sqrt{2}, 2\sqrt{2}): \quad 80\sqrt{2}(x - 5/\sqrt{2}) + 100\sqrt{2}(y - 2\sqrt{2}) = 0 .$$

(v) Determinare un vettore ortogonale ad A in uno dei suoi punti critici vincolati.

$$\text{Spazio normale ad } A \text{ in } (5/\sqrt{2}, 2\sqrt{2}): \quad \{\lambda(4, 5) : \lambda \in \mathbb{R}\} .$$