

SECONDA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2002/2003, 20 marzo 2003

d32275

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3
A	C	B

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 4 vale 8 punti.

ESERCIZIO 1. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $t \mapsto \varphi_\alpha(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 5e^{2t}, \quad y(0) = 6/5, \quad \dot{y}(0) = \alpha.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☒ **A** Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si ha $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{3t} \varphi_\alpha(t) = 1$.
- ☐ **B** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{3t} \varphi_\alpha(t) = -\infty$.
- ☐ **C** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{3t} \varphi_\alpha(t)$ esiste finito.
- ☐ **D** Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} \varphi_\alpha(t) = 0$.

ESERCIZIO 2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1 + 1/n)}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ **A** Esiste $\alpha \leq 0$ per cui la serie è convergente.
- ☐ **B** Per ogni $\alpha \in]0, 1[$ la serie non è convergente.
- ☒ **C** Per ogni $\alpha > 0$ la serie è convergente.
- ☐ **D** Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 3. Fissati $\alpha \in \mathbb{R}$, $r > 0$, si consideri la regione

$$D_r \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I_\alpha(r) \doteq \iint_{D_r} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A $\lim_{r \rightarrow 0} I_1(r)$ esiste finito.
- ☒ B Per ogni $\alpha < 1$ $\lim_{r \rightarrow 0} I_\alpha(r)$ esiste finito.
- ☐ C Esiste $\alpha < 1$ per cui si ha $\lim_{r \rightarrow 0} I_\alpha(r) = +\infty$.
- ☐ D Esiste $\alpha < 1$ per cui $\lim_{r \rightarrow 0} I_\alpha(r)$ esiste finito.
-

ESERCIZIO 4. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = 4x^2 + 3xy + 9y^2$ sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0\}$.

(i) Determinare eventuali punti critici vincolati di f e stabilirne la natura.

Punti critici vincolati: $(3/\sqrt{2}, \sqrt{2}), (3/\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-3/\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-3/\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(ii) L'immagine della funzione è:

$$\text{Im}(f) = [27, 45].$$

(iii) Stabilire quali punti (x_0, y_0) di A sono regolari (A si può rappresentare in un intorno di (x_0, y_0) come grafico cartesiano di una funzione).

Tutti i punti di A sono regolari.

(iv) Scrivere l'equazione della retta tangente ad A in uno dei suoi punti critici vincolati.

$$\text{Retta tangente ad } A \text{ in } (3/\sqrt{2}, \sqrt{2}): 12\sqrt{2}(x - 3/\sqrt{2}) + 18\sqrt{2}(y - \sqrt{2}) = 0.$$

(v) Determinare un vettore ortogonale ad A in uno dei suoi punti critici vincolati.

$$\text{Spazio normale ad } A \text{ in } (3/\sqrt{2}, \sqrt{2}): \{\lambda(2, 3) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$