SECONDA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2002/2003, 20 marzo 2003

d52189

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

1	2	3
D	C	A

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 4 vale 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Fissati $\alpha \in \mathbb{R}$, $r > 0$, si consideri la regione

$$D_r \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq r^2\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I_\alpha(r) \doteq \iint_{D_r} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dxdy\,.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

[A] Esiste $\alpha > 1$ per cui si ha $\lim\limits_{r\to+\infty} I_\alpha(r) = +\infty\,.$

[B] $\lim\limits_{r\to+\infty} I_1(r)$ esiste finito.

[C] Esiste $\alpha < 1$ per cui $\lim\limits_{r\to+\infty} I_\alpha(r)$ esiste finito.

[X] Per ogni $\alpha > 1$ $\lim\limits_{r\to+\infty} I_\alpha(r)$ esiste finito.

ESERCIZIO 2. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $t \mapsto \varphi_\alpha(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 7\,e^{3t}, \qquad y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = \alpha\,.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

[A] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-2t}\,\varphi_\alpha(t)$ esiste finito.

[B] Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{-2t}\,\varphi_\alpha(t) = +\infty\,.$

[X] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui si ha $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{-2t}\,\varphi_\alpha(t) = -7\,.$

[D] Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-3t}\,\varphi_\alpha(t) = 0\,.$

ESERCIZIO 3. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\left(\frac{1}{n}\right)} - 1}{n^{\alpha}}, \qquad \alpha \in \mathbf{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

$\boxed{\text{X}}$ Per ogni $\alpha > 0$ la serie è convergente.

$\boxed{\text{B}}$ Per ogni $\alpha \in]0, 1[$ la serie non è convergente.

$\boxed{\text{C}}$ Esiste $\alpha \leq 0$ per cui la serie è convergente.

$\boxed{\text{D}}$ Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 4. Sia $f : A \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = 16x^2 + 7xy + 25y^2$ sull'insieme $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0\right\}$.

(i) Determinare eventuali punti critici vincolati di f e stabilirne la natura.

Punti critici vincolati: $(5/\sqrt{2},\, 2\sqrt{2})$, $(5/\sqrt{2},\, -2\sqrt{2})$, $(-5/\sqrt{2},\, 2\sqrt{2})$, $(-5/\sqrt{2},\, -2\sqrt{2})$.

(ii) L'immagine della funzione è:

$$\mathrm{Im}(f) = [330,\, 470].$$

(iii) Stabilire quali punti (x_0, y_0) di A sono regolari (A si può rappresentare in un intorno di (x_0, y_0) come grafico cartesiano di una funzione).

Tutti i punti di A sono regolari.

(iv) Scrivere l'equazione della retta tangente ad A in uno dei suoi punti critici vincolati.

Retta tangente ad A in $(5/\sqrt{2},\, 2\sqrt{2})$: $\quad 80\sqrt{2}\,\big(x - 5/\sqrt{2}\big) + 100\sqrt{2}\,\big(y - 2\sqrt{2}\big) = 0.$

(v) Determinare un vettore ortogonale ad A in uno dei suoi punti critici vincolati.

Spazio normale ad A in $(5/\sqrt{2},\, 2\sqrt{2})$: $\quad \big\{\lambda\,(4,\,5) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\big\}.$