SECONDA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2003/2004, 25 marzo 2004

a35591

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

1	2	3
B	D	A

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 4 vale 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Sia $t \mapsto \varphi(t; \,, c_1, c_2)$ l'integrale generale dell'equazione di Eulero

$$t^2 \ddot{y} - 2y = 8t^3, \quad t > 0\,,$$

e si consideri il limite

$$\ell(c_1, c_2) \doteq \lim_{t \to 0^+} \varphi(t; \,, c_1, c_2)\,.$$

Allora si ha:

[A] $\ell(c_1, c_2) = +\infty$ per ogni $c_1,\, c_2$.

[X] Esistono $c_1,\, c_2$ t.c. $\ell(c_1, c_2) = 0$.

[C] Esistono $c_1,\, c_2$ t.c. $\ell(c_1, c_2) = 1$.

[D] $\ell(c_1, c_2) = -\infty$ per ogni $c_1,\, c_2$.

ESERCIZIO 2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2 + n^\alpha}{n^2}\right)^2, \qquad \alpha \in \mathbf{R}\,,$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

[A] Esiste $\alpha \in [1,\, 3/2]$ per cui la serie è convergente.

[B] Per ogni $\alpha > 3/2$ la serie è convergente.

[C] Per ogni $\alpha < 2$ la serie è convergente.

[X] Per ogni $\alpha < 1$ la serie è convergente.

ESERCIZIO 3. Data una funzione continua $f : D \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \neq 0\} \to \mathbb{R}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

$\boxed{\text{X}}$ Se $\left(\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)\right) \cdot \left(\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)\right) < 0$ allora f ha almeno uno zero.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\left(\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} f(x,y)\right) \cdot \left(\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)\right) < 0$ allora f ha almeno uno zero.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = -\lim_{x\to+\infty} f(-x,-x) = +\infty$, allora $\mathrm{Im(f)} = \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{D}}$ Se $\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = -\lim_{x\to+\infty} f(-x,x) = +\infty$, allora $\mathrm{Im(f)} = \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione definita da $f(x,y) = xy\, e^{-2(x^2+y^2)}$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f.

Punti critici: $(0,0)$, $(1/2,\, 1/2)$, $(1/2,\, -1/2)$, $(-1/2,\, 1/2)$, $(-1/2,\, -1/2)$.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f.

Punti di minimo relativo: $(1/2,\, -1/2)$, $(-1/2,\, 1/2)$.

Punti di massimo relativo: $(1/2,\, 1/2)$, $(-1/2,\, -1/2)$.

Punto di sella: $(0,0)$.

(iii) Determinare eventuali punti critici di f vincolati sulla circonferenza unitaria

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Punti critici vincolati: $(1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2},\, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2},\, -1/\sqrt{2})$.

(iv) Determinare l'immagine della restrizione di f al cerchio unitario

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$f(C) = [-1/4e,\, 1/4e].$$