SECONDA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 25 marzo 2004

b67221

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3
D	D	C

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 4 vale 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^3+n^\alpha}{n^\alpha}\right)^3, \qquad \alpha \in \mathbf{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A Esiste $\alpha < 3$ per cui la serie è convergente.

B Per ogni $\alpha < 10/3$ la serie è convergente.

C Esiste $\alpha \in [3,\, 4[$ per cui la serie è convergente.

$\boxtimes$ Per ogni $\alpha > 4$ la serie è convergente.

ESERCIZIO 2. Data una funzione continua $f : D \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \neq 0\} \to \mathbb{R}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A Se $\left(\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y)\right) \cdot \left(\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)\right) < 0$ allora f ha almeno uno zero.

B Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x,x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,-x) = +\infty$, allora $\mathrm{Im(f)} = \mathbb{R}$.

C Se $\left(\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)\right) \cdot \left(\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)\right) < 0$ allora f ha almeno uno zero.

$\boxtimes$ Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x,x) = +\infty$, allora $\mathrm{Im(f)} = \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3. Sia $t \mapsto \varphi(t; , c_1, c_2)$ l'integrale generale dell'equazione di Eulero

$$t^2\ddot{y} - t\dot{y} - 15y = 7t^4, \quad t > 0,$$

e si consideri il limite

$$\ell(c_1, c_2) \doteq \lim_{t\to 0^+} \varphi(t; , c_1, c_2).$$

Allora si ha:

- A $\ell(c_1, c_2) = +\infty$ per ogni c_1, c_2.
- B $\ell(c_1, c_2) = -\infty$ per ogni c_1, c_2.
- ☒ C Esistono c_1, c_2 t.c. $\ell(c_1, c_2) = 0$.
- D Esistono c_1, c_2 t.c. $\ell(c_1, c_2) = -1$.

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = (x^2 - y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f.

Punti critici: $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f.

Punti di minimo relativo: $(0, -1)$, $(0, 1)$.

Punti di massimo relativo: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

Punto di sella: $(0, 0)$.

(iii) Determinare eventuali punti critici di f vincolati sulla circonferenza unitaria

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Punti critici vincolati: $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

(iv) Determinare l'immagine della restrizione di f al cerchio unitario

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \le 1\}.$$

$$f(C) = [-1/e,\, 1/e].$$