I APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2003/2004, 25 marzo 2004

c65227

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

1	2	3	4	5	6
A	C	C	B	B	D

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Data una funzione continua $f : D \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \neq 0\} \to \mathbb{R}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

$\boxed{\cancel{A}}$ Se $\left(\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)\right) \cdot \left(\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)\right) < 0$ allora f ha almeno uno zero.

$\boxed{B}$ Se $\left(\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} f(x,y)\right) \cdot \left(\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)\right) < 0$ allora f ha almeno uno zero.

$\boxed{C}$ Se $\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = -\lim_{x\to+\infty} f(-x,-x) = +\infty$, allora $\mathrm{Im(f)} = \mathbb{R}$.

$\boxed{D}$ Se $\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = -\lim_{x\to+\infty} f(-x,x) = +\infty$, allora $\mathrm{Im(f)} = \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2. Determinare l'insieme dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui è convergente l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^\alpha) - 1}{x + 3x^2}\, dx\,.$$

$\boxed{A}$ I è convergente per ogni $\alpha < 0$.

$\boxed{B}$ Esiste $\alpha \in]0,1[$ per cui I non è convergente.

$\boxed{\cancel{C}}$ I è convergente per ogni $\alpha > 0$.

$\boxed{D}$ I non è convergente per ogni α.

ESERCIZIO 3. Data una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \varphi(y-2x)$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A $\quad f_{yy}(x,y) - 2f_{xx}(x,y) = 0 \quad$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

B $\quad f_{xx}(x,y) + f_{xy}(x,y) = 0 \quad$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

X $\quad f_{xx}(x,y) - 4f_{yy}(x,y) = 0 \quad$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

D $\quad f_{xx}(x,y) - f_{xy}(x,y) = 0 \quad$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 4. Sia $t \mapsto \varphi(t; , c_1, c_2)$ l'integrale generale dell'equazione di Eulero

$$t^2\ddot{y} - 2y = 8t^3, \quad t > 0,$$

e si consideri il limite

$$\ell(c_1, c_2) \doteq \lim_{t \to 0^+} \varphi(t; , c_1, c_2).$$

Allora si ha:

A $\quad \ell(c_1, c_2) = +\infty \quad$ per ogni c_1, c_2.

X $\quad$ Esistono c_1, c_2 t.c. $\ell(c_1, c_2) = 0$.

C $\quad$ Esistono c_1, c_2 t.c. $\ell(c_1, c_2) = 1$.

D $\quad \ell(c_1, c_2) = -\infty \quad$ per ogni c_1, c_2.

ESERCIZIO 5. Si consideri la regione $D \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ \ |y| \leq x\}$, e si calcoli l'integrale

$$I \doteq \iint_D e^{(x^2+y^2)}\, dxdy.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A $\quad I = 0$.

X $\quad I = \dfrac{\pi\,(e^4 - 1)}{4}$.

C $\quad I = \pi\,(e^4 + 1)$.

D $\quad I = \pi\,(1 - e^{16})$.

ESERCIZIO 6. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2 + n^\alpha}{n^2}\right)^2, \qquad \alpha \in \mathbf{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A $\quad$ Esiste $\alpha \in [1,\, 3/2]$ per cui la serie è convergente.

B $\quad$ Per ogni $\alpha > 3/2$ la serie è convergente.

C $\quad$ Per ogni $\alpha < 2$ la serie è convergente.

X $\quad$ Per ogni $\alpha < 1$ la serie è convergente.

ESERCIZIO 7. Si consideri la curva parametrica $\vec{r}\,:[-\ln 2,\,\ln 2+3/2]\to\mathbb{R}^2$ definita da

$$\vec{r}(t)=\begin{cases}\big(\cosh t,\,\sinh t\big) & \text{se} \quad t\in\big[-\ln 2,\,\ln 2\big]\,,\\ \big(5/4,\;\ln 2+3/4-t\big) & \text{se} \quad t\in\,]\ln 2,\,\ln 2+3/2]\,.\end{cases}$$

(i) Determinare eventuali punti di discontinuità di $\vec{r}$ e stabilire se è una curva chiusa.

$\vec{r}$ è una curva continua e chiusa.

(ii) Determinare eventuali punti di intersezione della curva $\vec{r}$ con gli assi cartesiani e tracciare la traiettoria probabile della curva.

asse x : $\quad x=1,\quad x=5/4\,.$

Non ci sono intersezioni con l'asse y.

(iii) Scrivere l'equazione della retta tangente a $\vec{r}$ nel punto $\vec{r}(0)$.

La retta tangente a $\vec{r}$ in $\vec{r}(0)=(1,0)$ è $x=1\,.$

(iv) Calcolare l'area $A(\vec{r})$ della regione delimitata da $\vec{r}$. (Nel calcolo di integrali di funzioni iperboliche del tipo $\int\sinh^2 t\,dt$, $\int\cosh^2 t\,dt$, si suggerisce di utilizzare la formula di integrazione per parti e l'identità $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$).

$$A(\vec{r})=\ln 2-\frac{15}{6}\,.$$

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x,y) = xy\, e^{-2(x^2+y^2)}$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f.

Punti critici: $(0,0)$, $(1/2,\, 1/2)$, $(1/2,\, -1/2)$, $(-1/2,\, 1/2)$, $(-1/2,\, -1/2)$.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f.

Punti di minimo relativo: $(1/2,\, -1/2)$, $(-1/2,\, 1/2)$.

Punti di massimo relativo: $(1/2,\, 1/2)$, $(-1/2,\, -1/2)$.

Punto di sella: $(0,0)$.

(iii) Determinare eventuali punti critici di f vincolati sulla circonferenza unitaria

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Punti critici vincolati: $(1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2},\, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2},\, -1/\sqrt{2})$.

(iv) Determinare l'immagine della restrizione di f al cerchio unitario

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$f(C) = [-1/4e,\, 1/4e]\,.$$