

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 25 marzo 2004

d27756

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
D	B	B	A	C	D

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n^3 + n^\alpha}{n^\alpha} \right)^3, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A Esiste $\alpha < 3$ per cui la serie è convergente.
- ☐ B Per ogni $\alpha < 10/3$ la serie è convergente.
- ☐ C Esiste $\alpha \in [3, 4[$ per cui la serie è convergente.
- ☒ D Per ogni $\alpha > 4$ la serie è convergente.

ESERCIZIO 2. Data una funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 , si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \varphi(y + 3x)$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A $f_{xx}(x, y) + f_{xy}(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☒ B $f_{xx}(x, y) - 9f_{yy}(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ C $f_{yy}(x, y) - 3f_{xy}(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ D $f_{xx}(x, y) - f_{xy}(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 3. Determinare l'insieme dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui è convergente l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x^\alpha)}{x^3 + 2x^2} dx.$$

- ☐ A Esiste $\alpha \in]1/2, 1[$ per cui I non è convergente.
- ☒ B I è convergente per ogni $\alpha > 1/2$.
- ☐ C I non è convergente per ogni α .
- ☐ D I è convergente per ogni $\alpha < 1/2$.

ESERCIZIO 4. Si consideri la regione $D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, |x| \leq y\}$, e si calcoli l'integrale

$$I \doteq \iint_D e^{(1+x^2+y^2)} dx dy.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☒ A $I = \frac{\pi(e^{10} - e)}{4}$.
- ☐ B $I = \pi(1 - e^{10})$.
- ☐ C $I = 0$.
- ☐ D $I = \frac{\pi(e^{10} + 1)}{2}$.

ESERCIZIO 5. Sia $t \mapsto \varphi(t; \cdot, c_1, c_2)$ l'integrale generale dell'equazione di Eulero

$$t^2 \ddot{y} - t\dot{y} - 15y = 7t^4, \quad t > 0,$$

e si consideri il limite

$$\ell(c_1, c_2) \doteq \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t; \cdot, c_1, c_2).$$

Allora si ha:

- ☐ A $\ell(c_1, c_2) = +\infty$ per ogni c_1, c_2 .
- ☐ B $\ell(c_1, c_2) = -\infty$ per ogni c_1, c_2 .
- ☒ C Esistono c_1, c_2 t.c. $\ell(c_1, c_2) = 0$.
- ☐ D Esistono c_1, c_2 t.c. $\ell(c_1, c_2) = -1$.

ESERCIZIO 6. Data una funzione continua $f : D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A Se $\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} f(x, y) \right) \cdot \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x, y) \right) < 0$ allora f ha almeno uno zero.
- ☐ B Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x, x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, -x) = +\infty$, allora $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.
- ☐ C Se $\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) \right) \cdot \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x, y) \right) < 0$ allora f ha almeno uno zero.
- ☒ D Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x, x) = +\infty$, allora $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la curva parametrica $\vec{r} : [-\ln 3, \ln 3 + 8/3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (\sinh t, \cosh t) & \text{se } t \in [-\ln 3, \ln 3], \\ (\ln 3 + 4/3 - t, 5/3) & \text{se } t \in]\ln 3, \ln 3 + 8/3]. \end{cases}$$

- (i) Determinare eventuali punti di discontinuità di $\vec{r}$ e stabilire se è una curva chiusa.

$\vec{r}$ è una curva continua e chiusa.

- (ii) Determinare eventuali punti di intersezione della curva $\vec{r}$ con gli assi cartesiani e tracciare la traiettoria probabile della curva.

asse y : $x = 1, x = 5/3$.

Non ci sono intersezioni con l'asse x .

- (iii) Scrivere l'equazione della retta tangente a $\vec{r}$ nel punto $\vec{r}(0)$.

La retta tangente a $\vec{r}$ in $\vec{r}(0) = (0, 1)$ è $y = 1$.

- (iv) Calcolare l'area $A(\vec{r})$ della regione delimitata da $\vec{r}$. (Nel calcolo di integrali di funzioni iperboliche del tipo $\int \sinh^2 t \, dt, \int \cosh^2 t \, dt$, si suggerisce di utilizzare la formula di integrazione per parti e l'identità $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$).

$$A(\vec{r}) = \frac{20}{9} - \ln 3.$$

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = (x^2 - y^2) e^{-(x^2 + y^2)}$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f .

Punti critici: $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f .

Punti di minimo relativo: $(0, -1)$, $(0, 1)$.

Punti di massimo relativo: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

Punto di sella: $(0, 0)$.

(iii) Determinare eventuali punti critici di f vincolati sulla circonferenza unitaria

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Punti critici vincolati: $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

(iv) Determinare l'immagine della restrizione di f al cerchio unitario

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$f(C) = [-1/e, 1/e].$$