

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA L-B

Ing. Informatica (L-Z) ed Ing. Energetica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2004/2005, 22 Marzo 2005

c43297

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

1	2	3	4	5	6
C	A	C	C	B	D

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4.5 punti, ogni risposta sbagliata vale -0.5, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 7 vale 9 punti).

ESERCIZIO 1. Determinare l'immagine della funzione definita da

$$f(x, y) = \exp\left(\frac{x^2}{x - y}\right).$$

Si ha:

☐ A $\text{Im}(f) = [0, +\infty[.$

☐ B $\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$

☒ C $\text{Im}(f) =]0, +\infty[.$

☐ D $\text{Im}(f) =]1, +\infty[.$

ESERCIZIO 2. Calcolare il volume V della regione

$$R \doteq \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy \leq z \leq \frac{1}{1 + x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Si ha:

☒ A $V = \pi \ln 2.$

☐ B $V = \frac{(1 - 16\pi \ln 2)}{8}.$

☐ C $V = \frac{\pi}{4}(1 - 4 \ln 2).$

☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 3. Data la funzione $f(x, y) = 4x^2 + 25y^2 - 100$, e la curva parametrica $\vec{r}(t) = (5 \cos t, 2 \sin t)$, si consideri la funzione composta $\phi(t) = f(\vec{r}(t))$, $t \in \mathbb{R}$, e se ne calcoli la derivata $\phi'(\frac{13}{11}\pi)$. Si ha:

☐ A $\phi'(\frac{13}{11}\pi) = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$

☐ B $\phi'(\frac{13}{11}\pi) = 1.$

☒ C $\phi'(\frac{13}{11}\pi) = 0.$

☐ D $\phi'(\frac{13}{11}\pi) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$

ESERCIZIO 4. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la curva parametrica chiusa

$$\vec{r}_\alpha(t) = \begin{cases} (\alpha \sin t, \cos(2t)) & \text{se } t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], \\ (\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - t, 0) & \text{se } t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\alpha]. \end{cases}$$

Determinare l'area (orientata) $A(\alpha)$ della regione delimitata da $\vec{r}_\alpha$. Si ha:

☐ A Esiste $\alpha \neq 0$ t.c. $A(\alpha) = 0$.

☐ B $A(\alpha) = -3\alpha\pi \quad \forall \alpha$.

☒ C $A(\alpha) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\alpha \quad \forall \alpha$.

☐ D $A(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{2\alpha}} \quad \forall \alpha \neq 0$.

ESERCIZIO 5. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi_\alpha(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{y} - 4y - 8e^{2x} = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = \alpha.$$

e si consideri il limite

$$\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_\alpha(x).$$

Allora si ha:

☐ A $\ell(\alpha) = +\infty \quad \forall \alpha$.

☒ B Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell(\alpha) = 0$.

☐ C Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell(\alpha) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

☐ D $\ell(\alpha) = -\infty \quad \forall \alpha > 0$.

ESERCIZIO 6. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\frac{1}{n^2} + \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

☐ A Esiste $\alpha \geq 0$ per cui la serie è convergente.

☐ B Per ogni $\alpha < -1$ la serie è convergente.

☐ C Esiste $\alpha \leq -2$ per cui la serie non è convergente.

☒ D Per ogni $\alpha < -\frac{3}{2}$ la serie è convergente.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2 + 4y^2}$.

- (i) Determinare eventuali punti critici di f .

Punti critici: $(0, -1/2), (0, 1/2)$.

- (ii) Determinare la natura dei punti critici di f .

Punto di minimo relativo: $(0, -1/2)$.

Punto di massimo relativo: $(0, 1/2)$.

- (iii) Calcolare (se esiste) il valore del limite

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0.$$

- (iv) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = [-1/4, 1/4].$$

- (v) Determinare l'immagine della restrizione di f alla regione

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

$$f(T) = [-1/5, 1/5].$$