# I APPELLO DI
# ANALISI MATEMATICA L-B

## Ing. Informatica (L-Z) ed Ing. Energetica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

### A.A. 2004/2005, 22 Marzo 2005

d32219

COGNOME E NOME: ..........................................................................

MATRICOLA: ..................................................................................

CORSO DI LAUREA: ......................................................................

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| B | D | B | C | B | D |

**N.B.** *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4.5 punti, ogni risposta sbagliata vale -0.5, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 7 vale 9 punti).*

**ESERCIZIO 1.** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\frac{1}{n^3} + \tan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

[A] Per ogni $\alpha < -1$ la serie è convergente.

[X] Per ogni $\alpha < -\frac{4}{3}$ la serie è convergente.

[C] Esiste $\alpha \geq 0$ per cui la serie è convergente.

[D] Esiste $\alpha \leq -3$ per cui la serie non è convergente.

**ESERCIZIO 2.** Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la curva parametrica chiusa

$$\vec{r}_\alpha(t) = \begin{cases} \big(\cos(2t),\, \alpha\cos t\big) & \text{se} \quad t \in \left[\frac{\pi}{4},\, \frac{3\pi}{4}\right], \\ \big(0,\, -\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + t\big) & \text{se} \quad t \in \left[\frac{3\pi}{4},\, \frac{3\pi}{4} + \sqrt{2}\,\alpha\right]. \end{cases}$$

Determinare l'area (orientata) $A(\alpha)$ della regione delimitata da $\vec{r}_\alpha$. Si ha:

[A] $A(\alpha) = \frac{2}{3}\,\alpha\,\pi \quad \forall\, \alpha$.

[B] $A(\alpha) = -\frac{3}{2\sqrt{2\alpha}} \quad \forall\, \alpha \neq 0$.

[C] Esiste $\alpha \neq 0$ t.c. $A(\alpha) = 0$.

[X] $A(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\alpha \quad \forall\, \alpha$.

**ESERCIZIO 3.** Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $x \mapsto \varphi_\alpha(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{y} - 9y + 18\,e^{3x} = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = \alpha\,.$$

e si consideri il limite

$$\ell(\alpha) \doteq \lim_{x \to -\infty} \varphi_\alpha(x)\,.$$

Allora si ha:

[A] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell(\alpha) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

[X] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell(\alpha) = 0$.

[C] $\ell(\alpha) = -\infty \quad \forall\, \alpha$.

[D] $\ell(\alpha) = +\infty \quad \forall\, \alpha < 0$.

**ESERCIZIO 4.** Calcolare il volume $V$ della regione

$$R \doteq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ \frac{2xy}{3} \leq z \leq \frac{1}{1+2x^2+2y^2}\,, \quad x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

Si ha:

[A] $V = \dfrac{\big(1 - 3\pi \ln 3\big)}{12}$.

[B] $V = \dfrac{\pi}{6}\big(1 - 3\ln 3\big)$.

[X] $V = \dfrac{\pi}{2}\ln 3$.

[D] Nessuna delle altre risposte è corretta.

**ESERCIZIO 5.** Data la funzione $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2 - 36$, e la curva parametrica $\vec{r}(t) = \big(2\cos t,\, 3\sin t\big)$, si consideri la funzione composta $\phi(t) = f(\vec{r}(t))$, $t \in \mathbb{R}$, e se ne calcoli la derivata $\phi'\big(\frac{11}{12}\pi\big)$. Si ha:

[A] $\phi'\big(\frac{11}{12}\pi\big) = 1$.

[X] $\phi'\big(\frac{11}{12}\pi\big) = 0$.

[C] $\phi'\big(\frac{11}{12}\pi\big) = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

[D] $\phi'\big(\frac{11}{12}\pi\big) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

**ESERCIZIO 6.** Determinare l'immagine della funzione definita da

$$f(x,y) = \exp\left(\frac{y^2}{y-x}\right).$$

Si ha:

[A] $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

[B] $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

[C] $\mathrm{Im}(f) = [1,\, +\infty[$.

[X] $\mathrm{Im}(f) = ]0,\, +\infty[$.

**ESERCIZIO 7.** Si consideri la funzione definita da $f(x,y) = \dfrac{y}{1+3x^2+y^2}$.

(i) Determinare eventuali punti critici di $f$.

Punti critici: $(0,-1)$, $(0,\,1)$.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di $f$.

Punto di minimo (assoluto): $(0,-1)$.

Punto di massimo (assoluto): $(0,\,1)$.

(iii) Calcolare (se esiste) il valore del limite

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = 0\,.$$

(iv) Determinare l'immagine di $f$:

$$\mathrm{Im}(f) = \big[-1/2,\ 1/2\big]\,.$$

(v) Determinare l'immagine della restrizione di $f$ alla regione

$$T = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ 3x^2+y^2 \le \frac{1}{9}\right\}.$$

$$f(T) = \big[-3/10,\ 3/10\big]\,.$$