

II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2002/2003, 15 aprile 2003

a37265

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
B	A	A	D	C	A

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Si consideri la curva parametrica γ di equazione $x(t) = \frac{t^2}{2}$, $y(t) = t$, $t \in [0, 1]$, e si calcoli l'integrale curvilineo (di prima specie) $I \doteq \int_{\gamma} (\sqrt{2x} + 5y) ds$. Si ha:

- ☐ A $I = -4\sqrt{2}$.
- ☒ B $I = 2(2\sqrt{2} - 1)$.
- ☐ C $I = 0$.
- ☐ D $I = 4(\sqrt{2} - 1)$.

ESERCIZIO 2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cosh\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{2}{n^2}\right)}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta. (Si ricordino gli sviluppi asintotici $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$, $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$).

- ☒ A Per ogni $\alpha > -3$ la serie è convergente.
- ☐ B Esiste $\alpha \in]-2, 2[$ per cui la serie non è convergente.
- ☐ C Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ la serie è convergente.
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 3. Fissato $r > 0$, si consideri la regione

$$D_r \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I(r) \doteq \iint_{D_r} xy \, dx dy.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☒ **A** $I(r) = \frac{r^4}{8}.$
☐ **B** $I(r) = \frac{r^3}{8}.$
☐ **C** $I(r) = 0.$
☐ **D** Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 4. Data la funzione

$$f(x, y) = \int_x^{\cos(x^2+y^2)} \arccos t \, dt$$

stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ **A** $f_x(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, 0) + f_y(0, \sqrt{\frac{\pi}{4}}) = \pi\sqrt{\pi}.$
☐ **B** $f_x(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}}) + f_y(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}}) = 0.$
☐ **C** $f_x(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}}) - f_y(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}}) = -\pi.$
☒ **D** $f_x(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}}) + f_y(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}}) = -\pi\sqrt{\pi}.$

ESERCIZIO 5. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $t \mapsto \varphi_\alpha(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 6e^{-t}, \quad y(0) = \alpha, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ **A** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{2t} \varphi_\alpha(t) = 0.$
☐ **B** Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{2t} \varphi_\alpha(t)$ esiste finito.
☒ **C** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{2t} \varphi_\alpha(t)$ esiste finito.
☐ **D** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{t} \varphi_\alpha(t)$ esiste finito.

ESERCIZIO 6. Calcolare l'area A della regione delimitata dalla curva parametrica chiusa

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (\sinh t, t^2 - t) & \text{se } t \in [0, 1], \\ ((2-t) \sinh 1, 0) & \text{se } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

- ☒ **A** $A = 1 + \frac{3e^{-1} - e}{2}.$
☐ **B** $A = \cosh 1 - \sinh 1.$
☐ **C** $A = 1 + \cosh 1.$
☐ **D** Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = (x + y) e^{-(x^2 + y^2)}$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f .

Punti critici: $(1/2, 1/2), \quad (-1/2, -1/2)$.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f .

Punto di minimo relativo: $(-1/2, -1/2)$.

Punto di massimo relativo: $(1/2, 1/2)$.

(iii) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = [-1/\sqrt{e}, 1/\sqrt{e}].$$

(iv) Stabilire se esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x - y}.$$

Il limite non esiste.

ESERCIZIO 8. Sia $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$ sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$.

(i) Determinare eventuali punti critici vincolati di f sulla frontiera di A e stabilirne la natura.

Punti critici vincolati su ∂A :

$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \quad (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), \quad (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \quad (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}).$$

$$\text{Punti di minimo relativo:} \quad (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \quad (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}).$$

$$\text{Punti di massimo relativo:} \quad (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), \quad (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}).$$

(ii) Determinare eventuali punti critici liberi di f e stabilirne la natura.

La funzione non ha punti critici liberi.

(iii) L'immagine della funzione è:

$$\text{Im}(f) =]0, 2].$$

(iv) Stabilire quali sono i punti (x_0, y_0) regolari delle curve di livello di f

$$E_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = c\}, \quad c \in \mathbf{R},$$

(E_c si può rappresentare in un intorno di (x_0, y_0) come grafico cartesiano di una funzione).

Tutti i punti delle curve di livello E_c sono regolari.

(v) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello E_1 nel punto $(1, -1)$.

$$\text{Retta tangente ad } E_1 \text{ in } (1, -1): \quad x - y - 2 = 0.$$

(vi) Determinare un vettore ortogonale alla curva di livello E_1 nel punto $(1, -1)$.

$$\text{Spazio normale ad } E_1 \text{ in } (1, -1): \quad \{\lambda(1, -1) : \lambda \in \mathbf{R}\}.$$