II APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2003/2004, 19 aprile 2004

a73427

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

1	2	3	4	5	6
A	B	A	C	A	B

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Data una funzione derivabile $f : D \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy \neq 1\} \to \mathbb{R}$, con derivate parziali ovunque nulle, e tale che $f(0,0)=0$, stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

$\boxed{\cancel{A}}$ $f(x,y)=0 \quad \forall\ (x,y) \in D \quad$ t.c. $\quad xy < 1\,.$

$\boxed{B}$ $f(x,y)=0 \quad \forall\ (x,y) \in D \quad$ t.c. $\quad xy \geq 0\,.$

$\boxed{C}$ $f(x,y)=0 \quad \forall\ (x,y) \in D \quad$ t.c. $\quad xy > 1\,.$

$\boxed{D}$ $f(x,y)=0 \quad \forall\ (x,y) \in D\,.$

ESERCIZIO 2. Determinare l'insieme dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui è convergente l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(x^2)\cos x}{\sqrt{1+x^\alpha}-1}\,dx\,.$$

(Si ricordi lo sviluppo asintotico $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0)$.

$\boxed{A}$ I è convergente per ogni $\alpha > 2\,.$

$\boxed{\cancel{B}}$ I è convergente per ogni $\alpha < 3\,.$

$\boxed{C}$ Esiste $\alpha \in [3,\, 6[$ per cui I è convergente.

$\boxed{D}$ I non è convergente per ogni $\alpha < 1\,.$

ESERCIZIO 3. Data la funzione $f(x,y) = e^{(x^2-y^2)}$, e la curva parametrica $\vec{r}(t) = \big(\cosh(2t), \sinh(2t)\big)$, si consideri la funzione composta $\phi(t) = f(\vec{r}(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

[X] $\phi'(t) = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$

[B] $\phi'(0) = 2e^2\,.$

[C] $\phi'(1) = e\,.$

[D] $\exists\, t \in \mathbb{R}$ per cui si ha $\phi'(t) = 1\,.$

ESERCIZIO 4. Sia $x \mapsto \varphi(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = 3x\,(1+y^2)\,, \\ y(3) = 1\,. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

[A] φ è definita su tutto $\mathbb{R}$.

[B] φ è una funzione limitata.

[X] $x = \sqrt{9 - \frac{\pi}{6}}$ è uno zero di φ.

[D] $x = 9 + \frac{\pi}{4}$ è uno zero di φ.

ESERCIZIO 5. Si consideri la regione

$$D \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \leq 0\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I \doteq \iint_D y\,\sqrt{x}\;dxdy\,.$$

Si ha.

[X] $I = -\frac{4}{21}.$

[B] $I = -\frac{1}{3}.$

[C] $I = \frac{4}{7}.$

[D] $I = -\frac{10}{7}.$

ESERCIZIO 6. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)\alpha^n}, \qquad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\,,$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

[A] Se $|\alpha| = 1$, allora la serie è convergente.

[X] Per ogni $\alpha \leq -1$ la serie è convergente.

[C] Se $|\alpha| < 1$, allora la serie è convergente.

[D] Per ogni $\alpha < 0$ la serie non è convergente.

ESERCIZIO 7. Si consideri la curva parametrica γ di equazione (in coordinate polari): $\rho = \sin^2\theta, \quad \theta \in [0,\, 2\pi]\,.$

(i) Scrivere le equazioni della curva γ in coordinate cartesiane e determinare eventuali punti di intersezione con gli assi cartesiani.

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta\,\sin^2\theta, \\ y(\theta) = \sin^3\theta, \end{cases} \qquad \theta \in \; [0,\, 2\pi]\,.$$

$$\text{asse } x: \qquad x = 0\,.$$

$$\text{asse } y: \qquad y = 0, \quad y = -1, \quad y = 1\,.$$

(ii) Determinare i punti regolari della curva γ.

L'unico punto non regolare di γ è $(0,0)$.

(iii) Scrivere l'equazione della retta tangente a γ nel punto di coordinate polari $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\rho = 1$.

La retta tangente a γ in $(0,1)$ è $y = 1$.

(iv) Calcolare l'integrale curvilinieo (di prima specie) $I \doteq \int_\gamma \frac{x}{y^{\frac{2}{3}}}\,ds\,.$

$$I = 0\,.$$

(v) Tracciare la traiettoria probabile della curva.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f.

Punti critici: $(0,0)$, $(0,\,1)$, $(1,\,0)$, $(1/3,\,1/3)$.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f.

Punto di minimo (assoluto): $(1/3,\,1/3)$.

Punti di sella: $(0,0)$ $(0,\,1)$, $(1,\,0)$.

(iii) Determinare l'immagine della restrizione di f alla frontiera della regione

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

$$f(\partial T) = \{0\}.$$

(iv) Determinare l'immagine della restrizione di f alla regione T.

$$f(T) = [-1/27,\, 0].$$